18796

DRA. FRANJE HOCEVARA

MJERSTVO

MJERSTVO

ZA

NIŽE GIMNAZIJE I NALIKE IM ŠKOLE.

DRUGO IZDANJE

PRIREDIO

IVAN KENFELJ,

PROFESOR U KRALJ. GIMNAZIJI VARAŽDINSKOJ.

KRUTO VEZANO STOJI 1 KR. 10 FIL.

KNJIGA U ZAGREBU ZEMALJSKA NAKLADA ŠKOLSKIH

U ZAGREBU

U ZAGREBU

TROŠKOM I NAKLADOM KRALJ. HRV.-SLAV.-DALM. ZEMALSKE VLADE

1896.

Ova se knjiga ne smije skuplje prodavati, nego za cijenu naznačenu na prednjoj strani.

Tiskarski zavod „Narodnih Novina“ u Zagrebu.

Sadržaj

	strana
Uvod	1
Ravninomjerstvo.	
Pravac	3
Krug A.	6
Kut	9
Usporednice	16
Trokut	19
Sumjernica prušca	26
Sumjernica kuta	28
Sukladnost	30
Osobiti trokuti	33
Krug B.	35
Četverokut	40
Mnogokut	46
Jednakost ploština	50
Pretvaranje i dijeljenje likova	55
Mjerenje dužina	57
Mjerenje plohâ	61
Pitagorina poučka sa upotrebama	70
Sličnost	73
Čunjosječice	82
Tjelomjerstvo.	
Ravnina	87
Glavni položaji pravaca i ravnina	89
Određivanje položaja pravaca prema ravninama	90
Određivanje položaja dviju ravnina	94
Uglovi	96
Tjelesa.	
Bridnjak	99
Valjak	109
Šiljnik	113
Čunj	118
Kugla	123
Pravilni mnogoplošci	129

UVOD.

§. 1. **Mjerstvene tvorine. Pojam mjerstva.** Svako tijelo ima različna svojstva ili biljege, koje našim sjetilima opažamo; tijelo zauzima neki prostor, ima neki oblik i položaj, sastoji se od kakove tvarine stanovite boje i tvrdine, ima neku težinu, itd.

Od tih različnih svojstava tvarnih tjelesa promatra se u mjerstvu samo oblik, veličina i položaj, a na ostala se svojstva ne uzima obzir. Na taj način dobivamo predstave o mjerstvenim tjelesima te se veli:

Mjerstveno tijelo je potpuno omeđen prostor.

Svako tijelo ima tri istege ili dimenzije: dužinu, širinu i visinu (debljinu, dubljinu). Međe tjelesa zovu se plohe; svaka ploha ima dvije dimenzije; dužinu i širinu. Međe ploha zovu se crte; svaka crta ima samo jednu dimenziju: dužinu. Međe crta zovu se točke; točke nemaju nikakove dimenzije.

Primjerom neka služi kocka.

Točke, crte, plohe i tjelesa zovu se mjerstvene tvorine, a nauka o postanku i svojstvima mjerstvenih tvorina zove se mjerstvo ili geometrija.

Mjerstvene tvorine ne mogu se sjetilima opaziti, no one se mogu predočiti ili tvarnim tjelesima, koja se zovu modeli, ili pak crtežima t. j. likovima. Mjerstvenu tvorinu po stanovitim zahtjevima načiniti reći će tvorinu nacrtati (Crtežni zadaci).

§. 2. **Postanak mjerstvenih tvorina micanjem.** Ako se točka miče, to ona opisuje crtu. Crte su ili prave ili krive. Prema tomu, kako točka opisuje pravu crtu ili krivu, veli se, da ona za micanja svoj smjer pridržaje ili pak ga neprestano mijenja. Ako se miče crta, to ona opisuje plohu, samo ako se crta onim smjerom ne pomiče, kako je sama postala, što je n. pr. kod ravne

crte moguće. Plohâ ima ravnih i krivih. U ravnoj plohi ili ravnini mogu se u svim smjerovima crtati prave crte.

Ako se miče ploha, to će ona opisati tijelo, samo ako se ploha ne pomiče onim smjerom, kako je sama postala, što je n. pr. kod ravnine moguće.

§. 3. **Razdjelba mjerstva.** Prema tomu, jesu li mjerstvene tvorine u ravnini ili u prostoru, zovu se one ravne odnosno prostorne tvorine.

Nauka o ravnim tvorinama zove se ravninomjerstvo ili planimetrija; nauka o prostornim tvorinama zove se tjelomjerstvo ili stereometrija.

Ravninomjerstvo.

(Planimetrija.)

Pravac.

§. 4. **Osnovna svojstva pravaca.** Po predstavi, koju o pravoj crti imademo, lako ćemo odgovoriti na ova pitanja: Koliko pravaca može se jednom točkom povući? Koliko pravaca može se dvjema točkama povući? Koja je najkraća od svih crta, kojima se mogu dvije točke spojiti.

Osnovne poučke o pravcu: 1. Dvjema točkama može se samo jedan pravac povući. — 2. Pravac je najkraći put između dvije točke.

Zadaci. 1. Povuci pravac zadanom točkom. — Ovo je neodređeni zadatak, jer dopušta nebrojeno mnoštvo rješitaba.

2. Povuci pravac dvjema zadanim točkama. — Ovo je određeni zadatak, jer dopušta samo jednu rješidbu.

Za crtanje pravaca rabi lenjir.

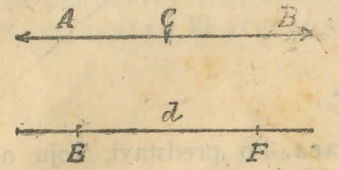
§. 5. **Neomeđen pravac ili zraka, poluzraka, pružac.** Pravac, za koji se pomišlja, da je na obje svoje strane beskonačno produžen zove se neomeđen pravac ili zraka; on se označuje jednim slovom ili dvjema nanj namještenim slovima, te se po tomu i zove n. pr. pravac *AB*, lik 1.

Neomeđen pravac dijeli se jednom svojom točkom na dva poluomeđena pravca ili na dvije poluzrake; poluzraka označuje se dvjema slovima, od kojih ima biti prvo slovo na međašnoj točki, n. pr. poluzrake *CA* i *CB* (lik 1.). Smjer poluzrake, u kojem se ona može pomišljati produljenom, označuje se znakom strjelice.

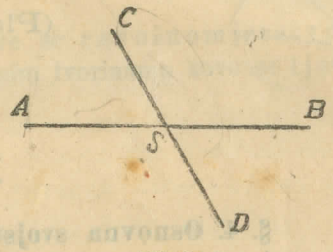
*

Dvjema točkama, dakle potpuno omeđen pravac zove se pružac; međašne točke njegove zovu se također krajne točke. Pružac se označuje ili dvjema slovima, koja se namještaju na krajne točke njegove, ili jednim slovom na sredinu prušca postavljenim, n. pr. pružac EF ili d, (lik 1.)

Pružac, koji spaja dvije točke, zove se njihova daljina ili razmak.



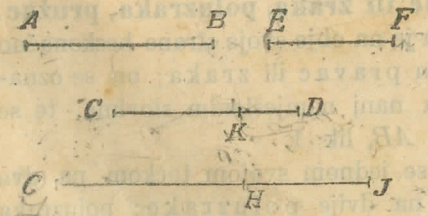
Lik 1.



Lik 2.

§. 6. **Sjecište dvaju pravaca.** Dva pravca mogu imati samo jednu točku zajedničku, za što? — N. pr. pravci AB i CD (lik 2.) imaju točku S zajedničku; veli se, oni se sijeku u S, te se ova točka zove sjecište pravaca.

§. 7. **Ispoređivanje pružaca.** Dva su prušca jednaka, kad se mogu tako sastaviti, da im se krajne točke, dakle i sve one, koje su između ovih, sastanu, kao što n. pr. prušci AB i CD, (lik 3.), što se bilježi: $AB = CD$. U protivnom slučaju su prušci nejednaki, kao n. pr. AB i EF; od tih je AB veći EF manji, što se označuje ili: $AB > EF$, ili: $EF < AB$.



Lik 3.

Zadatak. Zadani pružac prenesi, t. j. nacrtaj pružac, koji će biti zadanomu jednak.

Za ispoređivanje i prenošanje pružaca rabi šestar.

§. 8. **Računanje s pruščima.** Kao što s brojevima tako se mogu i s pruščima neki računi obaviti:

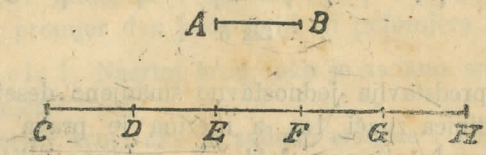
1. Zbrajanje. Ako je $GH = AB$ i $HJ = EF$ (lik 3.), onda je GJ zbroj pružaca AB i EF, što se označuje ovako:

$$GJ = GH + HJ \text{ ili } GJ = AB + EF.$$

2. Odbijanje. Ako je $CD = AB$ a $CK = EF$, (lik 3.) onda je DK razlika pružaca AB i EF, što se označuje ovako:

$$KD = CD - CK \text{ ili } KD = AB - EF.$$

3. Množenje prušca cijelim brojem. Neka je (lik 4.) $AB = CD = DE = EF = FG = GH$, onda je CE dva puta veće



Lik 4.

CF tri puta, CG četiri puta, a CH je pet puta veće od AB, što se označuje ovako:

$$CE = 2.\ AB,\ CF = 3.\ AB,\ CG = 4.\ AB,\ CH = 5.\ AB.$$

Koji god od tih pružaca zove se višekratnik prušca AB.

4. Dijeljenje prušca cijelim brojem. AB je polovina od CE, trećina od CF, četvrtina od CG, a petina od CH, što se označuje ovako:

$$AB = \tfrac{1}{2}CE = \tfrac{1}{3}CF = \tfrac{1}{4}CG = \tfrac{1}{5}CH.$$

Općenito se veli: AB je nekoja čest pružaca CE, CF, CG, CH.

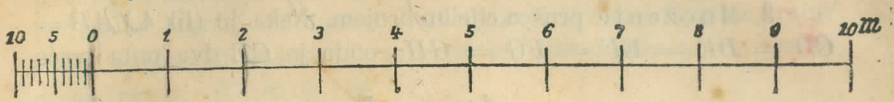
Pružac raspoloviti reći će podijeliti ga na dvije jednake česti; djelište zove se sredina prušca.

5. Mjerenje prušca nekim pruščem. Mjeriti koji pružac, reći će ispitivati, koliko se puta neki za jedinicu uzeti pružac u zadanom prušču sadržava. Onaj broj, koji pokazuje, koliko je puta jedinica u mjerenom prušču sadržana, zove se mjerni broj prušca. Jedinica za mjerenje dužinâ je metar (m); česti i mnogokratnici metra sastavljeni su po desetičnom sustavu:

0·1 m = 1 dm (decimetar)	10 m = 1 dkm (dekametar)
0·01 m = 1 cm (centimetar)	100 m = 1 hm (hektometar)
0·001 m = 1 mm (milimetar)	1000 m = 1 km (kilometar)
	10000 m = 1 μm (miriameter)

Za mjerenje dužina rabe nam štapovi od drva ili kovine, onda vrpce, lanci i slične sprave, na kojima je jedna jedinica ili više njih preneseno i odmjereno. Takove sprave zovu se mjerila. Kod crtanja nacrta (planova), zemljovida i slič. upotreblja-

vamo redovito pravce, na koje se jedinica smanjena prenese; takovi pravci zovu se smanjena mjerila.



Lik 5.

Lik 5. predstavlja jednostavno smanjeno desetično mjerilo, na kojem jedinica znači $1m$, a njezina je prava dužina $1cm$; ovo mjerilo predočuje nam dakle $\frac{1}{100}$ naravne veličine.

Zadaci: 1. Zadana su tri prušca a, b, c i to $a > b > c$; nacrtaj ove izraze:

$a + b$, $a + c$, $b + c$, $a - b$, $a - c$, $b - c$, $a + b + c$.

2. Nacrtaj dvo-, tro-, četvero-, petero-kratnik zadanoga nekoga pruška.

3. Razdijeli zadani pružac kušajuć šestarom ili pak samo od oka na 2, 3, 4, 5, 6 jednakih česti.

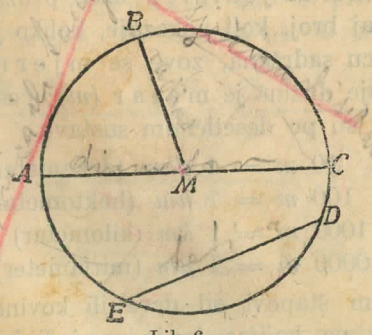
4. Zadan je pružac a; nacrtaj $3.a$, $5.a$ $\frac{2}{3}a$, $\frac{3}{5}a$, $1\frac{1}{3}a$, $\frac{3}{4}a$, $2{\cdot}4a$.

5. Izmjeri mjerilom u liku 5 kakav god zadani pružac.

6. Nacrtaj ovim istim mjerilom pružac zadane dužine, n. pr. $4m$, $7{\cdot}3m$.

Krug A.

§. 9. **Postanak kruga, razjašnjenja.** Ako se pružac MA (lik 6.) u ravnini oko jedne krajne točke okreće, dok se on ne vrati na svoje prvo mjesto, to će druga krajna točka opisati krivu crtu, koja se zove kružnica, a pružac sam čini kružnicom omeđenu plohu, koja se zove kružna ploha ili krug. Kružnica se još zove i obodnica ili periferija kruga.



Lik 6.

Kružnica je dakle crta, u kojoj su sve točke od neke izvjesne točke jednako udaljene; ova točka zove se središte (centrum) kruga ili kružnice (M, lik 6.) Svaki pružac, koji spaja

središte kruga s kojom točkom obodnice, zove se polumjer (radius); svi su polumjeri istoga kruga jednaki: $MA = MB = MC$. Za što?

Pružac, koji spaja dvije točke obodnice, zove se tetiva (horda), kao DE. Svaka tetiva, koja ide središtem kruga, zove se promjer (diametar), kao AC. Svi su promjeri kruga jednaki, jer je promjer dva puta dulji od polumjera.

Zadaci: 1. Nacrtaj krug, ako je zadano središte i jedna točka obodnice.

2. Nacrtaj krug, ako je zadano središte i polumjer.

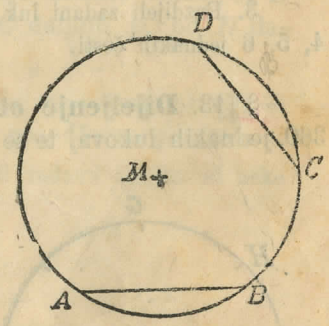
Za crtanje kružnica rabi šestar.

§. 10. **Jednaki krugovi.** Ako dva kruga imaju jednake polumjere, to se oni zovu jednaki. Kad se jedan položi na drugi tako, da im se središta sastanu, onda će im se i obodnice prikriti.

Dva kruga različnih polumjera zovu se nejednaki.

Zadatak. Prenesi krug, t. j. iz zadanoga središta opiši krug, koji će biti zadanomu krugu jednak.

§. 11. **Lûk, isječak, odsječak.** Dio kružnice zove se lúk (AB, lik 7.). Dva luka, koja pripadaju jednoj kružnici ili dvjema jednakim kružnicama, mogu se gledeć na njihovu veličinu kao što i dva prušca među sobom isporediti. Dva luka jednakih polumjera zovu se jednaka, kad ih možemo položiti jedan po drugom tako, da se sasvim prikriju; inače su oni nejednaki. Dva jednaka luka iste kružnice, kao AB i CD (lik 7.), mogu se na taj način prikriti, da se jedan ostavi na svom mjestu, a kružnica se s drugim lukom oko središta okreće, dok se lukovi ne prikriju.



Lik 7.

Promjer dijeli krug na dva jednaka dijela; za što? — Svaka druga tetiva dijeli kružnicu na dva nejednaka luka, n. pr. tetiva CD (lik 7.); manji zove se tetivni ili tetivi pripadajući luk.

Dio kružne plohe, koji je omeđen dvjema polumjerima i

jednim lukom, zove se kružni isječak ili sektor, kao *AMB* (lik 6.).

Dio kružne plohe, omeđen tetivom i pripadajućim joj lukom, zovu se kružni odsječak ili segmenat (*AB* lik 7.).

§. 12. **Odnošaj između luka i tetive.** Ako se jednaki lukovi *AB* i *CD* (lik 7.) prikriju, onda će se točke *A* i *C*, zatim točke *B* i *D* sastati; s toga će se i tetive *AB* i *CD* prikriti; one su dakle među sobom jednake, t. j. u istom krugu, ili u jednakim krugovima pripadaju jednakim lukovima jednake tetive. Obrnuto: Jednakim tetivama pripadaju jednaki lukovi.

Na temelju potonje poučke mogu se lukovi u istom krugu ili u jednakim krugovima prenijeti, ako se samo njihove tetive prenesu.

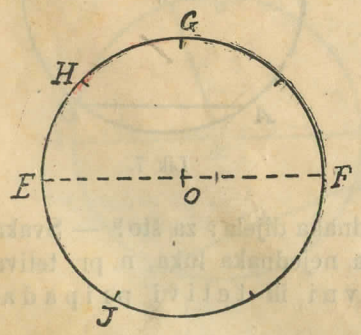
Lukovi jednakih polumjera mogu se poput pružaca zbrajati i odbijati. Luk se može također cijelim brojem pomnožiti i razdijeliti, i drugim lukom jednakog polumjera mjeriti.

Zadaci: 1. Prenesi luk.

2. Načini 2, 3, 4, 5 puta veći luk od zadanog luka.

3. Razdijeli zadani luk kušajuć šestarom ili pak od oka na 2, 3, 4, 5, 6 jednakih česti.

§. 13. **Dijeljenje obodnice.** Obodnica kruga dijeli se na 360 jednakih lukova, te se jedan takav dio zove stupanj (°), točnije lučni stupanj. Stupanj se dijeli na 60 minuta (′), minuta na 60 sekundi (″); $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.



Lik 8.

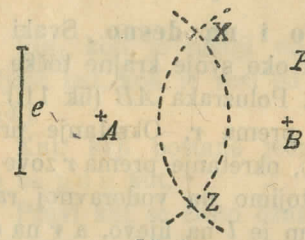
Polovina kružnice zove se polukružnica (*EGF*, lik 8.), četvrti dio zove se četvrtac ili kvadrant (*EG*), šesti dio sekstant (*EJ*), osmi dio oktant (*EH*). — Koliko stupnjeva ima polukružnica, koliko kvadrant, sekstant i oktant?

Zadaci: 1. Nacrtaj od oka četvrti dio nekog kvadranta, treći dio oktanta, peti dio sekstanta.

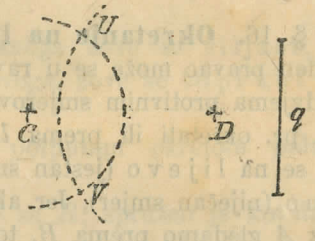
2. Koliko stupnjeva ima peti dio kvadranta, četvrti dio sekstanta?

3. Koliko stupnjeva ima deveti, koliko petnaesti dio obodnice?

§. 14. **Zadaci**: 1. Odredi točku, koja od dvije zadane točke *A*, *B* (lik 9) ima zadanu daljinu *e*. — Tražena točka mora biti negdje u kružnici opisanoj iz točke *A* polumjerom *e*, ali i u kružnici opisanoj iz točke *B* polumjerom *e*. Sjecišta *X* i *Z* obiju kružnica zadovoljavaju dakle gornjemu zahtjevu. Imaju li uvijek takove dvije točke?



Lik 9.



Lik 10.

2. Nacrtaj točku, koja ima od dvije zadane točke *C*, *D* (lik 10.) različne zadane daljine i to od *C* daljinu *p*, od *D* daljinu *q*. — Rješidba?

Zadaci: 1. a) $CD = 5cm$, $p = 3cm$, $q = 1cm$. b) $CD = 3{\cdot}5cm$, $p = 2cm$, $q = 3cm$. c) $CD = 36mm$, $p = 15mm$, $q = 21mm$.

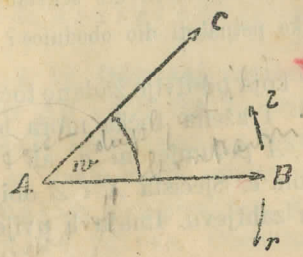
2. Odredi u pravcu točku, koja će imati zadanu daljinu od neke točke izvan pravca.

Kut.

§. 15. **Postanak kuta, razjašnjenja.** Kut postane, kad se poluomeđen pravac (*AB*, lik 11.) u ravnini oko svoje međašne točke okreće. Prvi i posljednji položaj obaju pravaca (*AB*, *AC*) zovu se kraci, njihova međašna točka (*A*) zove se vrh kuta.

Kut se označuje ili jednim slovom, koje se namjesti u kutnoj plohi blizu vrha, ili pak jednim slovom na samom vrhu,

te se pred slovo stavi kutni znak; dakle ∢ *w* ili ∢ *A*. Često je nužno za označivanje kutova uzeti tri slova, od kojih prvo i posljednje stoji na kracima, a srednje na vrhu, dakle ∢ *BAC* ili ∢ *CAB*.



Lik 11.

Veličina kuta nije zavisna od dužine krakova, t. j. sve jedno je, da li se kraci načine dugi ili kratki, jer ih uvijek možemo pomišljati produljenima (preko *B* i *C*).

Ako se dva kuta mogu tako sastaviti, da se oni posvema prikriju, onda se zovu jednaki.

§. 16. **Okretanje na lijevo i na desno.** Svaki poluomeđen pravac može se u ravnini oko svoje krajne točke okretati dvjema protivnim smjerovima. Poluzraka *AB* (lik 11.) može se n. pr. okretati ili prema *l* ili prema *r*. Okretanje prema *l* zove se na lijevo (jestan smjer), okretanje prema *r* zove se na desno (niječan smjer). Jer ako stojimo na vodoravnoj ravnini, pa iz *A* gledamo prema *B*, to nam je *l* na lijevo, a *r* na desno. — Kako se okreću kazaljke na uri?

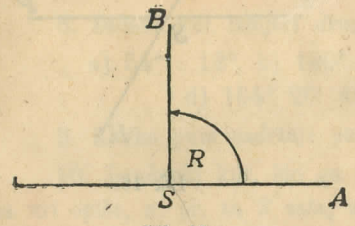
§. 17. **Razdjelba kutova.** Iz ovoga što je do sad rečeno, slijedi, da dva pravca čine dva kuta, kad ishode iz iste točke; manji kut zove se dupljast (šupalj, konkavni), veći pupčast (konveksni). U liku 11. je dupljast kut *w*, što ga čine pravci *AB* i *CD*, pobliže označen zavinutom strjelicom, te je nastao okretanjem pravca *AB* prema *AC* na lijevo; a okretanjem na desno od *AB* prema *AC* nastao je pupčast kut. Ako se naročito drugo ne istakne, to ćemo uvijek imati pred očima manji ili dupljast kut, kad ćemo govoriti o kutu dvaju pravaca.

Lik 12.

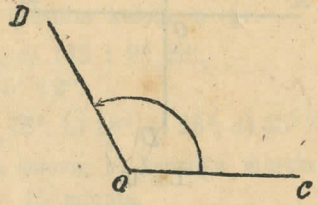
Kut, kojemu su kraci u pravcu na protivne strane okrenuti, zove se spružen ili ravan kut (*PSQ*, lik 12.); taj postane poluokretom poluzrake. Svi su spruženi kutovi jednaki; za što?

Svaki dupljast kut je manji, a svaki pupčast kut je veći od spružena kuta.

Polovina spružena kuta zove se pravi kut. (*ASB*, lik 13.); taj postane četvrtinom okreta poluzrake. Svi su pravi kuti jednaki; za što?



Lik 13.



Lik 14.

Kut, koji je manji od pravoga zove se šiljast; svaki dupljast kut, koji je veći od pravoga, zove se tupi kut (*COD*, lik 14.).

Kut, koji postane jednim potpunim okretom poluzrake, zove se pun kut.

Pravi kut se često označuje sa *R*; spružen je kut dakle = 2*R* a pun = 4*R*.

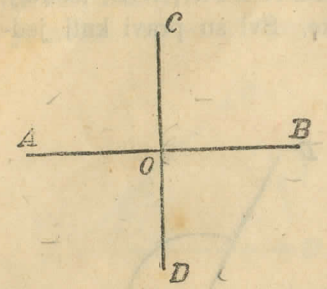
U praksi upotrebljavamo za mehaničko crtanje pravih kutova tako zvane „trokute“.

§. 18. **Razlika među smjerovima dviju poluzraka. Okomiti i kosi položaj.** Veličina kuta zavisna je isključivo od razmaka krakova, a nipošto od veličine krakova. Dvije poluzrake, koje iz jedne točke ishode, imaju različne smjerove; dupljast kut, što ga one čine, mjera je za razliku njihovih smjerova. Ako poluzrake prave spružen kut, onda imaju protivne smjerove, kao *SP* i *SQ* (lik 12.).

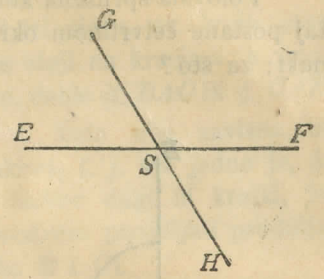
Ako dva pravca, koja se sijeku, čine prave kute, to se veli oni imaju jedan prema drugomu okomiti ($\perp$) položaj, ili jedan je pravac okomica drugoga, n. pr. $CD \perp AB$ (lik 15.). U jednoj točki pravca moguća je na njemu samo jedna okomica.

Čuvaj se zamijeniti pojam „okomito“ s pojmom „osovno“ ili „vertikalno“. Osnovan smjer predstavlja nam nît, na kojoj visi kakovo tijelo. — Pokaži primjere za okomite i osovne pravce.

Ako se dva pravca tako sijeku, da oni čine šiljaste i tupe kute, to se veli, oni su jedan na drugom kosi, ili oni se sijeku kosokutno; n. pr. *EF* i *GH*, (lik 16.)



Lik 15.



Lik 16.

§. 19. **Kutna mjera.** Kod određivanja kutne mjere ishodi se od pravoga kuta; pomišljamo ga naime na 90 jednakih kutova podijeljena, te se jedan ovakav dio zove stupanj (°), točnije kutni stupanj (za razliku od lučnog stupnja). Stupanj ima 60 minuta (′), minuta 60 sekundi (″).

Spružen kut ima po tomu 180 stupnjeva, a pun kut 360°.

1. Zadaci: Resolviraj, t. j. izrazi kut najnižim imenovanjem n. pr.

$$57^\circ\ 17'\ 45'' = 3437'\ 45'' = 206265'',$$

Tako isto:

$$360^\circ,\ 64^\circ\ 49',\ 22^\circ\ 25'\ 38''.$$

2. Reduciraj, t. j. izrazi kut najvišim imenovanjem. N. pr.

$$58294'' = 971'\ 34'' = 16^\circ\ 11'\ 34''$$

$$61^\circ\ 52'\ 30'' = 61^\circ\ 52{\cdot}5' = 61{\cdot}875^\circ.$$

Tako isto:

$1000''$, $201600''$, $2420'$, $1374'\ 12''$, $12^\circ\ 45'$, $106^\circ\ 13'\ 12''$, $48^\circ\ 7'\ 30''$.

3. Od ovih kutova označi šiljaste, tupe, i pupčaste:

135°, 75°, 210°, 36°, 324°, 160°, 270°, 100°.

4. Zadana su ova tri kuta:

$x = 78^\circ\ 5'\ 54''$, $y = 56^\circ\ 41'\ 19''$, $z = 45^\circ\ 12'\ 47''$. Izračunaj:

$x + y$, $x + z$, $y + z$, $x - y$, $x - z$, $y - z$, $x + y + z$.

5. Izračunaj dvo-, tro-, četvero-, petero-kratnik zadana kuta, n. pr. kuta 27°, $22^\circ\ 36'$.

6. Izračunaj polovinu, trećinu, četvrtinu i petinu zadana kuta, n. pr. kuta 30°, 60°, $44^\circ\ 15'$.

7. Koliko stupnjeva imaju ovi kuti:

$$\tfrac{2}{3}R,\ \tfrac{3}{4}R,\ \tfrac{3}{2}R,\ 1\tfrac{3}{5}R,\ 2\tfrac{1}{6}R?$$

8. Zadani kut izmjeri drugim kojim zadanim kutom, n. pr.

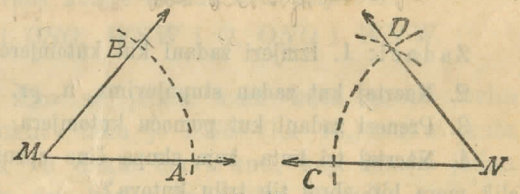
a) $54^\circ : 12^\circ$, b) $180^\circ : 22^\circ\ 30'$, c) $142 : 9^\circ\ 28'$,

d) $154^\circ\ 26'\ 42'' : 28^\circ\ 45'\ 12''$.

9. Koliko puta sadržaje pun kut: a) 12°, b) 18°, c) 25°, d) 45°?

10. Izračunaj kut, što ga a) kazaljka satova, b) kazaljka minuta na uri opiše, n. pr. za 3 sata, za 4 sata i 15 minuta.

§. 20. **Središnji kut i pripadajući mu luk.** Kut se zove središnji, kad je njegov vrh ujedno i središte nekoga kruga (*AMB*, lik 17.). Luk *AB* u kutnoj plohi zove se kutu pripadajući luk.



Lik 17.

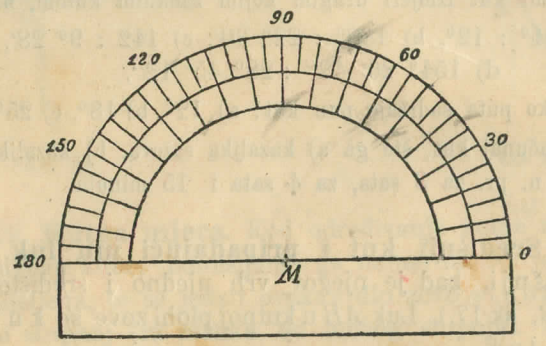
Dva jednaka središnja kuta mogu se tako sastaviti, da se oni sasvim prikriju; dogodi li se to, onda se moraju i jednakim polumjerima opisani pripadajući lukovi prikriti t. j. jednakim središnjim kutovima pripadaju jednaki lukovi. Obrnuto: Jednakim lukovima pripadaju jednaki središnji kuti.

Na osnovu potonje poučke može se prenošanje i dijeljenje kutova svesti na prenošanje i dijeljenje lukova.

Zadatak: Prenesi zadani kut t. j. nacrtaj kut, koji će biti jednak zadanomu kutu. Ako je *AMB* (lik 17.) zadani kut, a *NC* jedan krak kuta, koji se ima nacrtati, to se s vrhova *M* i *N* istim polumjerom opišu lukovi *AB* i *CD*, te se tetiva *AB* prenese u položaj *CD*. — Obrazloženje?

Pošto se obodnica kruga dijeli na 360 stupnjeva, kao što i puni kut, s toga slijedi: Svaki kut ima toliko stupnjeva, minuta i sekundi, koliko i njemu pripadajući luk. To se izrazuje u kratko još i ovako: Kutu je mjerom pripadajući luk.

Transporter ili kutomjer je polukrug od tvrda papira ili žute mjedi i sličnog, te je razdijeljen na stupnjeve (lik 18.). Kutomjer rabi za mjerenje i prenošanje zadanih kutova i za crtanje kutova, koji imaju zadanu množinu stupnjeva.



Lik 18.

Zadaci: 1. Izmjeri zadani kut kutomjerom.

2. Nacrtaj kut zadan stupnjevima, n. pr. 54° itd.

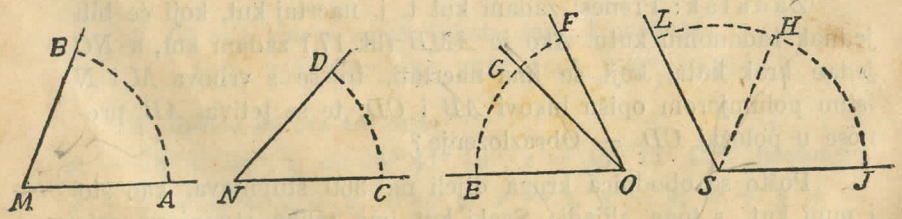
3. Prenesi zadani kut pomoću kutomjera.

4. Nacrtaj tri kuta, koja skupa čine spružen kut, te ih izmjeri. Kolik mora biti zbroj tih triju kutova?

§. 21. **Računanje s kutovima.** Ako je (lik 19.) $JSH = AMB$ i $HSL = CND$, onda je kut JSL zbroj kutova AMB i CND.

Ako je $EOF = AMB$ i $EOG = CND$, onda je kut GOF razlika kutova AMB i CND.

Višekratnici nekog kuta.



Lik 19.

Ako se ima zadani kut na neku množinu jednakih česti razdijeliti, to se pripadajući luk razdijeli na traženu množinu jednakih česti, pa se djelišta i vrh samo spoje. Polovljenje kuta, polovnica.

Zadaci: 1. Zadana su tri kuta x, y, z i to $x > y > z$; nacrtaj ove izraze:

$x + y$, $x + z$, $y + z$; $x - y$, $x - z$, $y - z$; $x + y + z$.

2. Nacrtaj dvo-, tro-, četvero-, petero-kratnik zadanoga kuta

3. Zadani kut razdijeli kušajuć šestarom ili samo od oka na 2, 3, 4, 5, 6 jednakih česti.

4. Nacrtaj od oka pravi kut (polovljenjem spružena kuta).

5. Nacrtaj ove kute:

$\frac{2}{3}R$. $\frac{3}{4}R$, $\frac{3}{2}R$, $1\frac{2}{5}R$.

6. Nacrtaj vjetrovnicu (Windrose) i naznači okomice na ove smjerove:

NO, *SSW*, *ONO*.

7. Odredi na vjetrovnici kutove između ovih smjerova:

NO i *SO*, *ONO* i *OSO*, *WSW* i *O*, *ONO* i *WNW*.

§. 22. **Sukuti.** Ako se jedan krak kuta preko vrha produlji, to postane sukut: tako je FSG (lik 16.) sukut kuta ESG i obrnuto. Sukuti su dakle takvi kuti, koji imaju jedan krak zajednički, a druga dva kraka čine jedan pravac.

Zbroj dvaju sukuta je spružen kut ili $= 2R$. Od dva nejednaka sukuta jedan je šiljast a drugi tup. (Lik 16.) Ako su dva sukuta jednaka, onda je svaki od njih prav (lik 15.).

§. 23. **Vršni kuti.** Ako se oba kraka kuta preko vrha produlje, to produljenja čine vršni kut zadanoga kuta; tako je FSH (lik 16.) vršni kut kuta ESG i obrnuto. Vršni kuti su dakle takova dva kuta, kod kojih su kraci jednoga kuta produljenja krakova drugoga.

Vršni su kuti jednaki, jer postanu jednim istim okretom. Ako se naime neomeđen pravac oko jedne svoje točke okreće, to će on opisati par vršnih kutova, n. pr. EF (lik 16.) okretanjem na desno par ESG i FSH, — okretom pako na lijevo par ESH i FSG.

§. 24. **Komplementni i suplementni kuti.** Dva kuta, kojih zbroj čini 90°, zovu se ispunjujući se ili kom-

plementni kuti i svaki se od njih zove ispunjak ili komplemenat drugoga.

Dva kuta, kojih zbroj čini 180°, zovu se potpunjujući se ili suplementni kuti, i svaki se od njih zove potpunjak ili suplemenat drugoga.

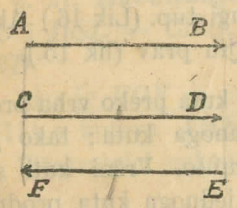
Jednaki kuti imaju jednake ispunjke i jednake potpunjke i obratno.

Zadaci: Izračunaj a) ispunjak, b) potpunjak zadana kuta, n. pr. kuta 71° 32′ 13″.

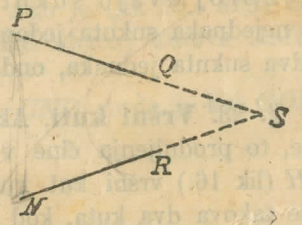
Usporednice ili paralele.

§. 25. **Razjašnjenja.** Dva se pravca u istoj ravnini zovu usporedna ili paralelna ($\parallel$), kad se oni ma kako produljeni nigda ne sastanu, n. pr: $AB \parallel CD$, (lik 20.) Dva paralelna pravca mogu imati isti ili protivni smjer; tako su smjerovi pravaca AB i CD isti, a smjerovi pravaca CD i EF protivni su.

Dva pravca u istoj ravnini, koji nijesu paralelni, sastaju se dovoljno produljeni u jednoj točci kao NR i PQ, (lik 21.) Takovi se pravci primiču svomu sjecištu, a na drugu stranu se razmiču.



Lik 20.



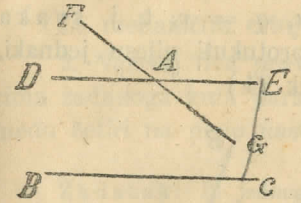
Lik 21.

§. 26. **Osnovna svojstva usporednica.** Iz predstave o usporednicama slijedi ispravnost ove poučke:

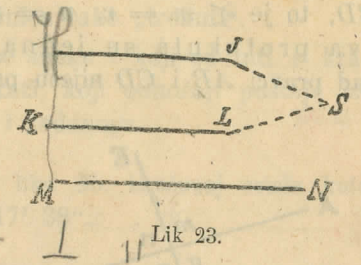
Zadanom točkom može se prema zadanomu pravcu samo jedna usporednica potegnuti.

Točkom A (lik 22.) možemo samo jedan pravac potegnuti, koji će biti s pravcem BC paralelan, naime DE; svaki drugi

pravac, koji ide točkom A, n. pr. FG, nije s BC paralelan. Iz toga slijedi:



Lik 22.



Lik 23.

a) Dva pravca, koja su s trećim paralelna, jesu i među sobom paralelna. Ako je $HJ \parallel MN$ i $KL \parallel MN$ (lik 23.), onda je također $HJ \parallel KL$: jer da nije HJ sa KL paralelno, to bi se ovi pravci dovoljno produljeni morali u jednoj točki S sastati, te bi ovom točkom išla dva pravca s MN paralelna, što nije moguće.

b) Ako pravac siječe jednu od dvije usporednice, to mora i drugu sjeći. Ako je $DE \parallel BC$ (lik 22.), a FG siječe pravac DE, onda mora FG također i pravac BC sjeći; inače bi išle sjecištem A dvije usporednice sa BC, što nije moguće.

§. 27. **Protukuti, izmjenični kuti, prikuti.** Pravac, koji siječe dva pravca ili više njih, zove se njihova priječnica ili transverzala. Dvjema pravcima i jednom priječnicom (lik 24. i 25.) postaje osam kutova, i to četiri vanjska i četiri nutarnja kuta, od kojih pojedini parovi s različnim vrhovima imaju različna imena i to:

Protukuti su jedan vanjski i jedan nutarnji na istoj strani priječnice i na različnim vrhovima, n. pr. m i r.

Izmjenični kuti su dva vanjska ili dva nutarnja kuta na protivnim stranama priječnice i na različnim vrhovima n. pr. p i r ili m i u.

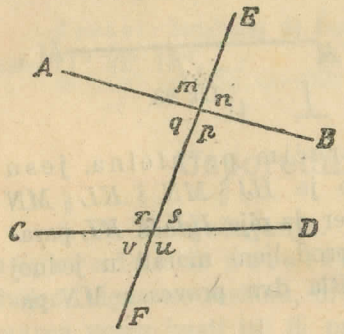
Prikuti su dva vanjska ili dva nutarnja kuta na istoj strani priječnice i na različnim vrhovima n. pr. q i r, ili m i v.

Vježbaj se u određivanju protukuta, izmjeničnih kutova i prikuta.

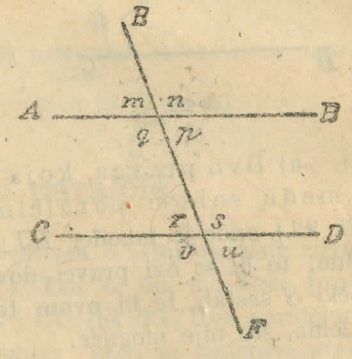
§. 28. **Poučke o usporednicama.** Kuti se između dva

pravca, koja se presijecaju, ne mienjaju, ako se jedan pravac paralelno sam prema sebi pomiče.

Ako dođe AB (lik 25.) paralelnim pomicanjem u položaj CD, to je $\sphericalangle m = r$, $n = s$, $p = u$, $q = v$, t. j. svaka dva protukuta su jednaka. No protukuti nijesu jednaki, kad pravci AB i CD nijesu paralelni (lik 24.).



Lik 24.



Lik 25.

Kod paralelnoga pomicanja u liku 25. past će $\sphericalangle m$ na $\sphericalangle r$, bit će on dakle vršni kut kuta u; dakle je $\sphericalangle m = u$. Tako isto je $n = v$, $p = r$, $q = s$, t. j. svaka dva izmjenična kuta su jednaka. Toga ne će biti, kad pravci AB i CD nijesu paralelni. (lik 24.)

Kod paralelnoga pomaknuća pravca AB u položaj CD (lik 25.) bit će dalje kuti m i v sukuti, za to je $m + v = 2R$. Tako isto je $n + u = 2R$, $p + s = 2R$, $q + r = 2R$, t. j svaka dva prikuta su suplementni kuti. Toga ne će biti, kad pravci AB i CD nijesu paralelni (lik 24.).

Iz toga slijedi:

a) Paralelni pravci čine sa svakom priječnicom jednake protukute, jednake izmjenične kute i suplementne prikute.

b) Ako dva pravca čine s priječnicom jednake protukute ili jednake izmjenične kute il suplementne prikute, to su ona dva pravca paralelna.

Zadaci: 1. Zadanom točkom prema zadanomu pravcu nacrtaj usporednicu. — Zadanom točkom A (lik 26.) potegni pravac AD, koji će zadani pravac CB sjeći, i načini $\sphericalangle EAD = BDA$, onda je $AE \parallel CB$. Kako bi nacrtao usporednicu pomoću protukutâ.

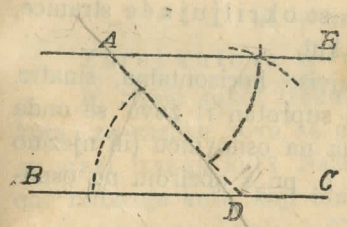
Za mehaničnu crtnju usporednica rabe „trokuti“.

2. Nacrtaj dva pravca, koji se sijeku i koji će biti s kracima zadanoga kuta paralelni, te kaži, koji odnošaji postoje između četiri na novo nastala kuta i zadanoga.

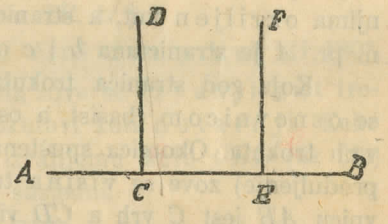
Zadatak: Iz jednoga kuta u liku 25. izračunaj ostale kute, n. pr a) $m = 75^0$ b) $n = 114^0\ 17'\ 38''$.

§. 29. **Svojstva okomica.** Upotrebom usporednica na okomice dobivamo ove dvije poučke:

a) Dvije okomice na jednom pravcu među sobom su paralelne. Ako je $CD \perp AB$ i $EF \perp AB$ (lik 27.), to su



Lik 26.



Lik 27.

protukuti ACD i CEF jednaki (za što?), s toga su pravci CD i EF paralelni.

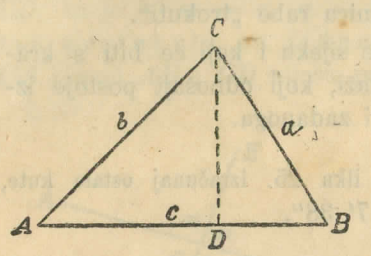
b) Ako je od dvije usporednice jedna na kojem pravcu okomita, onda je i druga; jer ako se okomica CD na pravcu AB pomakne u paralelni položaj EF, to je također $EF \perp AB$.

Trokut.

§. 30. **Razjašnjenja.** Ako se tri točke, koje nijesu u jednom pravcu, spoje pruščima, to će postati ravan lik, koji se zove trokut ($\triangle ABC$, lik 28.). Međašnji prušci AB, AC, BC zovu se stranice, točke A, B, C zovu se vrhovi ili vršne točke

*

trokuta: po dvije stranice čine jedan kut trokuta. Sve stranice skupa čine opseg, a veličina njima omeđene plohe zove se plošni sadržaj ili ploština trokuta.



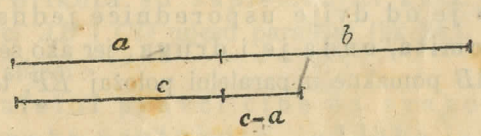
Lik 28.

Svakoj je stranici trokuta na suprot jedan kut; n. pr. stranica AB i kut C jesu jedan drugomu na suprot, te se s toga zovu suprotni dijelovi ili protučesti trokuta. Često se označuju stranice trokuta slovima a, b, c, tako da protučestima odgovaraju jednaka slova.

Na svakoj stranici trokuta dva su kuta, koji se zovu s obzirom na ovu stranicu prileže ći kuti stranice, n. pr. prileže ći kuti stranice AB ili c jesu A i B. Svaki kut trokuta načinjen je od dvije stranice, te se zovu s obzirom na ove stranice njima okriljen kut, a stranice zovu se okriljujuće stranice, n. pr. A je stranicama b i c okriljen kut.

Koja god stranica trokuta, ponajviše horizontalna, smatra se osnovnicom (basis), a osnovnici suprotan rt zove se onda vrh trokuta. Okomica spuštena s vrha na osnovnicu (ili njezino produljenje) zove se visina trokuta; n. pr. s obzirom na osnovnicu AB jest C vrh a CD visina

§. 31. **Odnošaji između stranica.** Pošto je pružac najkraća daljina između dvije točke, to je u trokutu svaka stranica ma i najveća ipak uvijek manja od zbroja drugih dviju



Lik 29.

stranica, n. pr. $c < a + b$ (lik 28. i 29.). Ako je c najveća stranica trokuta ABC, pa ako se po stranici c položi zbroj pružaca $a + b$, to se odmah vidi, da mora biti $b > c - a$; tako isto $a > c - b$, i što se samo od sebe razumijeva, također $c > b - a$; t. j. svaka stranica trokuta manja je od zbroja, a veća od razlike drugih dviju stranica.

Zadaci: 1. Zadane su tri stranice trokuta, izračunaj njegov opseg. N. pr. $a = 8{\cdot}7cm$, $b = 6{\cdot}5cm$, $c = 4{\cdot}8cm$.

2. Zadan je opseg i zadane su dvije stranice trokuta, izračunaj treću stranicu. N. pr. $o = 38{\cdot}0cm$, $a = 14{\cdot}6cm$, $b = 10{\cdot}4cm$.

3. Iz dvije zadane stranice trokuta izračunaj vrijednosti, između kojih može biti treća. N. pr. $a = 16cm$, $b = 9cm$.

§. 32. **Odnošaji između kutova.** a) Ako produljiš stranicu AB trokuta ABC preko vršne točke B (lik 30.) i potegneš $BE \parallel AC$, to se mogu stranice AB i BC smatrati po redu kao priječnice usporednica AC i BE; dakle je

$$\sphericalangle DBE = BAC = m, \quad \sphericalangle EBC = ACB = p.$$

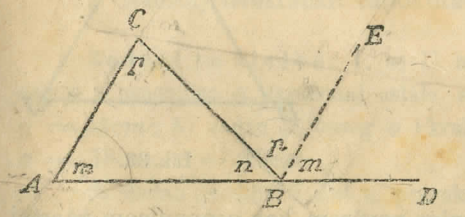
Ako još označiš $\sphericalangle ABC$ sa n i uvažiš, da kuti m, n, p, koji su na vrhu B, skupa čine spružen kut, onda je:

$$m + n + p = 2R, \text{ t. j.}$$

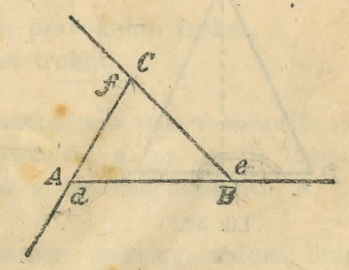
Zbroj kutova u trokutu čini dva prava ili 180^0.

b) Svaki sukut trokutova kuta zove se izvanji kut trokuta; za razliku zovu se onda trokutovi kuti nutarnji. Kako se pravi izvanji kut? Naznači k izvanjemu kutu CBD (lik 30.) one nutarnje kute, koji mu nijesu susjedni.

Iz lika 30. vidi se, da je $\sphericalangle CBD = m + p$, t. j.



Lik 30.



Lik 31.

Svaki izvanji kut trokuta jednak je zbroju dvaju nutarnjih kutova, koji mu nijesu susjedni.

c) Produljenjem svih stranica trokuta u istom smislu dobiju se tri izvanja kuta trokuta. (lik 31.) Ovi čine s nutarnjima tri para sukuta ili svega $6R$; od ovih otpada na nutarnje kute $2R$ dakle je zbroj izvanjih kutova trokuta jednak sa četiri prava:

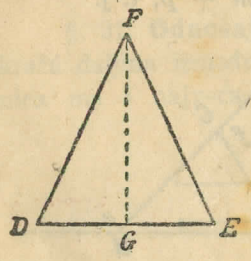
$$d + e + f = 4R.$$

Zadaci: 1. Iz jednoga kuta trokuta izračunaj zbroj drugih dvaju; n. pr. $c = 73^0\ 51'\ 25''$.

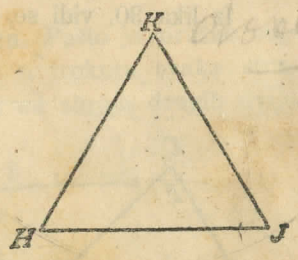
2. Iz dva kuta trokuta izračunaj treći; n. pr. $a = 78^0\ 18'\ 11''$, $b = 53^0\ 17'\ 37''$.

3. Iz dva izvanja kuta trokuta izračunaj nutarnje. n. pr. $d = 120^0$, $e = 135^0$ (lik 31).

§. 33. **Razdjelba trokuta s obzirom na stranice.** S obzirom na stranice dijele se trokuti na raznostranične, istokračne i istostranične. Trokut je raznostraničan, kad na njemu nije nijedna stranica s kojom drugom jednaka (*ABC*, lik 28.); on je istokračan, kad su na njemu dvije stranice jednake (*DEF*, lik 32.); trokut je istostraničan, koji ima sve tri stranice jednake (*HJK*, lik 33.). U istokračnom trokutu zovu se dvije jednake stranice kraci (*DF* i *EF* lik 32.), a treća se stranica (*DE*) zove obično osnovnica.



Lik 32.



Lik 33.

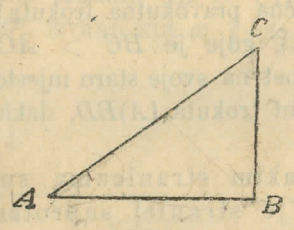
Zadaci: 1. Nad zadanim pruščem kao osnovnicom nacrtaj istokračan trokut. — (§. 14. Zad. 1.).

2. Nacrtaj istokračan trokut, ako je kut na vrhu zadan.

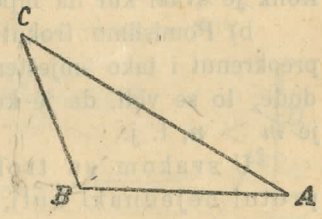
3. Nacrtaj istostraničan trokut.

§. 34. **Razdjelba trokuta s obzirom na kute.** S obzirom na kute dijele se trokuti na šiljastokutne, pravokutne i tupokutne.

Trokut se zove pravokutan, kad je u njemu jedan kut prav (*ABC*, lik 34.). Stranice (*AB*, *BC*), koje čine pravi kut, zovu se zatezice ili katete; pravomu kutu suprotna stranica (*AC*) zove se potpona ili hipotenuza. — Pod visinom pravokutnoga trokuta razumijeva se redovito ona, kojoj odgovara hipotenuza kao osnovnica. — Kolik je zbroj kutova na hipotenuzi?



Lik 34.



Lik 35.

Trokut, u kojem nije nijedan kut prav, zove se kosokutan i to šiljastokutan, ako su mu svi kuti šiljasti (lik 28.), a tupokutan, ako mu je jedan kut tup (lik 35.). Nacrtaj visinu u tupokutnom trokutu *ABC* (lik 35.) s obzirom na osnovnicu *AB* ili *BC*.

Ako je u kojem trokutu jedan kut jednak zbroju drugih dvaju, onda je takav trokut pravokutan; za što?

Zadaci: 1. Nacrtaj istokračan pravokutan trokut.

2. Nacrtaj istokračan tupokutan trokut.

Zadaci za vježbu: 1. a) U istokračnom trokutu zadan je opseg o i osnovnica g, izračunaj ostale stranice, n. pr. $o = 124cm$, $g = 54cm$; b) zadan je opseg o i krak s, izračunaj osnovnicu. N. pr. $o = 78cm$, $s = 29cm$.

2. Zadan je šiljasti kut u pravokutnom trokutu; izračunaj drugi šiljasti kut i izvanji kut na hipotenuzi. N. pr. $19^0\ 9'\ 30''$.

3. U trokutu *ABC* neka je $\sphericalangle A = 74^0$, $\sphericalangle B = 57^0$, dalje $CD \perp AB$: kolik je $\sphericalangle ACD$ i BCD?

4. U trokutu *ABC* je $\sphericalangle A = 90^0$, $\sphericalangle B = 47^0\ 18'$, dalje je $AD \perp BC$; kolik je svaki od kutova BAD i CAD?

§. 35. **Snošaji između protučesti trokuta.** a) Pomislimo istokračan trokut ABC (lik 36.) dignut, preokrenut i onda tako postavljen, da kut C na svoje prijašnje mjesto dođe, to su kraci CA i CB svoja mjesta zamijenili, a AB će pasti na BA; za što? Iz toga se vidi, da je $\sphericalangle A = \sphericalangle B$, te imamo poučku:

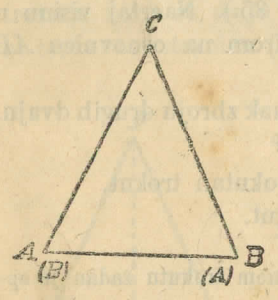
U svakom su trokutu jednakim stranicama na suprot jednaki kuti.

U istokračnom su dakle trokutu kuti na osnovnici među sobom jednaki; iz toga slijedi i to, da oni moraju biti šiljasti kuti. U istostraničnom su trokutu svi kuti jednaki; kolik je svaki? Kolik je svaki kut na hipotenusi istokračna pravokutna trokuta?

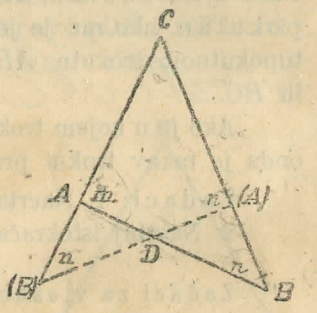
b) Pomislimo trokut ABC (lik 37.), gdje je $BC > AC$, preokrenut i tako smješten, da kut C opet na svoje staro mjesto dođe, to se vidi, da je kut m izvanji kut trokuta $(A)BD$, dakle je $m > n$, t. j.

U svakom su trokutu nejednakim stranicama suprotni nejednaki kuti, i to većoj je stranici suprotan veći kut.

Obje spomenute poučke o snošajima između protučesti trokuta mogu se ovako okrenuti:



Lik 36.



Lik 37.

c) U svakom su trokutu jednakim kutovima suprotne jednake stranice; jer da su stranice nejednake, to one ne bi mogle biti suprotne jednakim kutovima. Dokaži istinitost ove poučke okretanjem trokuta.

d) U svakom su trokutu nejednakim kutima suprotne nejednake stranice, i to većemu je kutu suprotna veća stranica.

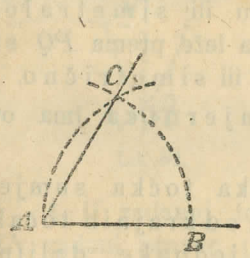
Posljeci: U pravokutnom trokutu je hipotenuza najveća stranica. U tupokutnom trokutu je tupomu kutu suprotna stranica najveća.

§. 36. **Zadaci:** 1. Nacrtaj kut od 60°. — Riješenje slijedi iz crtnje istostranična trokuta (lik 38.)

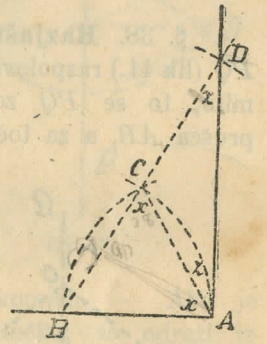
2. Nacrtaj kut od 120°. — Nacrtaj samo sukut kuta 60°.

3. Razdijeli spružen kut na tri jednake česti.

4. Nacrtaj pravi kut (1. način). — Najprije nacrtaj istostraničan trokut ABC (lik 39.) pa stranicu BC za njezinu dužinu produlji $CD = CB$; tad je $\sphericalangle BAD = 90°$. Jer je $\sphericalangle = 60°$, izvanji kut $x \parallel 2z$, dakle $z = 30°$ i $x + z = 90°$.



Lik 38.



Lik 39.

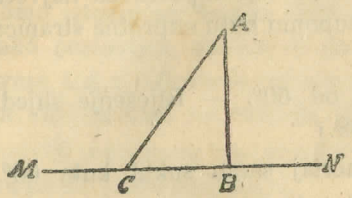
5. U krajnoj točci nekog pravca načini okomicu (1. način). — Ovaj se zadatak podudara s prijašnjim.

Zadaci za vježbu: 1. Zadan je jedan kut a) na osnovnici, b) na vrhu istokračnoga trokuta; izračunaj ostale kute. N. pr. 68°.

2. Iz zadanoga izvanjega kuta a) na osnovnici, b) na vrhu istokračnog trokuta izračunaj ostale izvanje i sve nutarnje kute. N. pr 105° 32′.

3. U trokutu ABC neka je $AC = BC$ i $\sphericalangle C = 38° 28′$. zatim $AD \perp BC$; kolik je svaki od kutova BAD i CAD?

§. 37. **Daljina točke od pravca.** Između točke A i pravca MN (lik 40.) možemo nebrojeno mnoštvo pružaca potegnuti; od tih bit će samo jedan na pravcu MN okomit. Jer ako je $AB \perp MN$ a AC koja druga spojnica, to je u pravokutnom



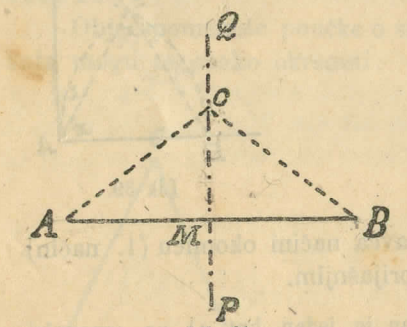
Lik 40.

trokutu ABC kut ACB šiljast. Iz toga slijedi $AB < AC$ (§. 35. d), t. j.

Od svih pružaca između jedne točke i nekoga pravca okomica je najkraći pružac; ona se za to zove daljina ili razmak točke od pravca.

Sumjernica ili simetrala prušca.

§. 38. **Razjašnjenje, svojstva sumjernice.** Ako pravac PQ (lik 41.) raspolovljuje pružac AB i ujedno na njema stoji okomito, to se PQ zove sumjernicom ili simetralom prušca AB, a za točke A i B se veli, da leže prema PQ sumjerno ili simetrično.



Lik 41.

Sumjernica ima ova svojstva:

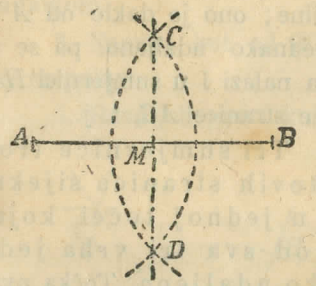
Svaka točka sumjernice ima od krajnih točaka prušca jednake daljine. Jer ako je C koja god točka sumjernice PQ, to se može trokut AMC okretanjem oko PQ s trokutom BMC tako sastaviti, da se oni prikriju, s toga je $AC = BC$.

Obraćaj: Svaka točka, koja ima od krajnih točaka nekog pruš ca jednake daljine, nalazi se u sumjernici toga prušca.

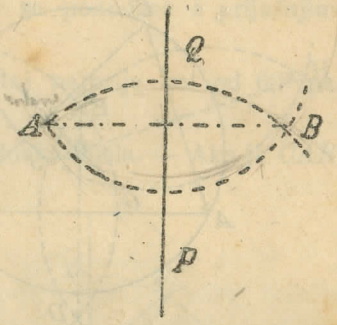
§. 39. **Zadaci.** 1. Nacrtaj sumjernicu zadanoga prušca. — Dovoljno je, ako nađeš dvije točke sumjernice; za što? — U to ime opiši iz krajnih točaka A i B zadanoga prušca (lik 42.) istim polumjerom dva luka, koji će se presjeći; onda je spojnica sjecišta C i D tražena sumjernica (§. 14., 1.).

2. Zadani pružac prepolovi. — Nacrtaj njegovu sumjernicu (lik 42.), onda je $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

3. Nacrtaj točku, koja će sa zadanom točkom s obzirom na zadani pružac biti sumjerna. — Pošto tražena točka B od koje god točke P zadane sumjernice (lik 43.) mora imati istu daljinu kao i zadana točka A, to se nalazi točka B negdje u luku, koji se opiše iz P polumjerom PA; isto se tako nalazi B u luku koji se iz koje god točke Q sumjernice opiše polumjerom QA, dakle je sjecište B obaju lukova tražena točka.

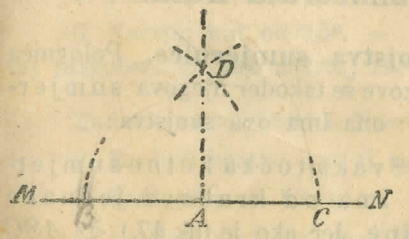


Lik 42.

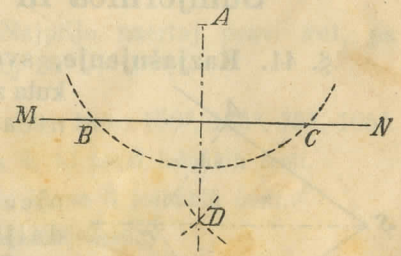


Lik 43.

4. U zadanoj točci pravca načini okomicu. — Ako je MN zadani pravac (lik 44.), A zadana točka, to odreži iz točke A na obje strane jednake prušce, $AB = AC$, te nacrtaj sumjernicu prušca BC. Pošto je već točka A sumjernice zadana, to je potrebno još naći samo točku D, $BD = CD$; onda je $AD \perp MN$



Lik 44.



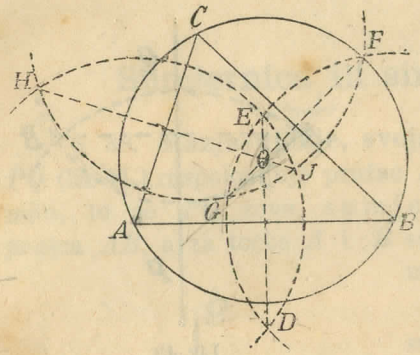
Lik 45.

5. Iz zadane točke na zadani pravac spusti okomicu. — Ako je MN zadani pravac (lik 45.), A zadana točka, te opiši

iz točke A luk, koji će MN u B i C presjeći, pa sad nacrtaj sumjernicu prušca BC, onda je $AD \perp MN$.

Zadatak za vježbu: Nad zadanim pruščem kao promjerom, nacrtaj krug.

§. 40. **Oko trokuta opisana kružnica.** Nacrtaj u trokutu ABC (lik 46.) sumjernice DE i FG dviju stranica AB i BC. Sjecište njihovo O, jer je na DE, ima od A i B jednake daljine, no jer je ono i na FG, ima i od B i C jednake daljine; ono je dakle od A i C jednako udaljeno, pa se s toga nalazi i u sumjerniči HJ treće stranice AC, t. j.



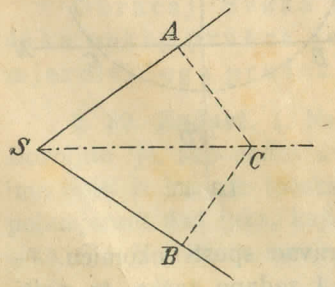
Lik 46.

Tri sumjernice trokutovih stranica sijeku se u jednoj točci koja je od sva tri vrha jednako udaljena. Točka ova je središte kružnice, koja ide trima vrhovima zadanoga trokuta, te se takova kružnica zove opisana kružnica.

Zadatak: Oko zadana trokuta opiši kružnicu. — Razlikuj tri slučaja, da li je na ime trokut šiljasto-, pravo-, ili tupokutan.

Sumjernica ili simetrala kuta.

§. 41. **Razjašnjenje, svojstva sumjernice.** Polovnica kuta zove se također njegova sumjernica; ona ima ova svojstva:



Lik 47.

Svaka točka kutne sumjernice ima od krakova jednake daljine. Jer ako je (lik 47.) $\sphericalangle ASC = BSC$, $CA \perp SA$ i $CB \perp SB$, to se ovi kuti mogu okretanjem oko SC prikriti. Onda se ne će samo kraci SA i SB sastati, već će se i okomice CA i CB prikriti, jer se s jedne točke na pravac može samo jedna okomica potegnuti (§. 37.). Dakle je $CA = CB$.

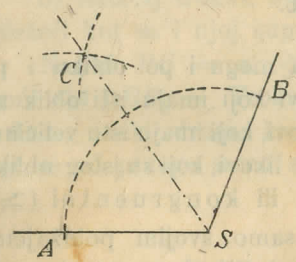
Obraćaj: Svaka točka je u sumjernici kuta, ako je od oba kraka jednako udaljena.

§. 42. **Zadaci:** 1. Nacrtaj sumjernicu zadanoga kuta. — Iz vrha S zadanoga kuta (lik 48.) opiši luk, koji će krake u točkama A i B presjeći, pomisli tetivu AB, pa nacrtaj njezinu sumjernicu; onda je $\sphericalangle ASC = BSC$. Dokaz prikrivanjem.

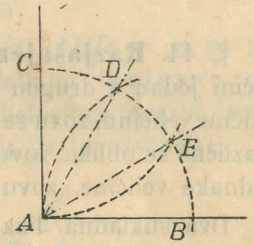
2. Raspolovi zadani kut. — To se podudara s prijašnjim zadatkom.

3. Nacrtaj kut od 30°. — Nacrtaj najprije kut od 60° pa ga raspolovi.

4. Razdijeli pravi kut na tri jednaka dijela. — Ako je CAB



Lik 48.



Lik 49.

(lik 49.) zadani pravi kut, to iz A opiši luk BC, a onda istim polumjerom iz B luk AD i iz C luk AE.

5. Nacrtaj kut od 15°.

6. Nacrtaj kut od 45°. — Najprije nacrtaj pravi kut, pa taj raspolovi, ili pak nacrtaj zbroj 30° + 15°.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj ove kute: 150°, 165°, 75°, 105°.

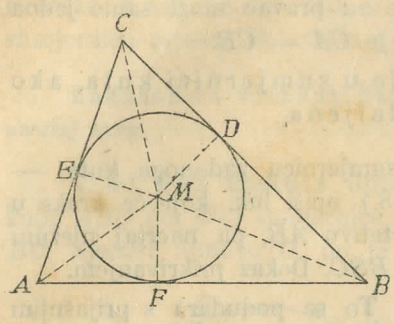
2. Razdijeli spružen kut a) na 4, b) na 6 jednakih česti.

3. Razdijeli pravi kut a) na 4, b) na 6 jednakih česti.

4. Razdijeli pravi kut na 8 jednakih česti.

5. Nacrtaj ove kute: $\frac{3}{4}R$, $\frac{1}{6}R$, $1\frac{1}{8}R$.

§. 43. **U trokut upisani krug.** Ako u trokutu ABC (lik 50.) nacrtaš dvije sumjernice AM i BM kutova A i B, to će se



Lik 50.

one presjeći u točci M, koja je od svih stranica jednako udaljena (za što?) Ona je dakle i u sumjernici trećega kuta C, t. j.

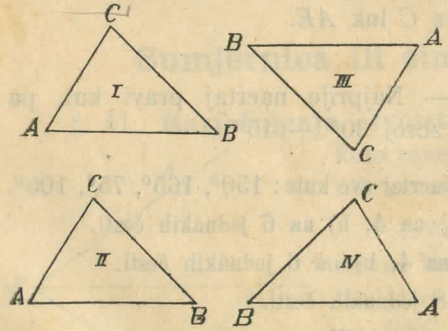
Tri kutne sumjernice trokuta sijeku se u jednoj točci, koja je od tri stranice jednako udaljena. Točka ova je središte kruga, koji dira sve tri stranice trokuta, te se takovi krug zove upisani krug.

Zadatak: Upiši krug u zadani trokut.

Sukladnost.

§. 44. **Razjašnjenja.** Dva se lika mogu i po obliku i po veličini jedan s drugim isporediti. Likovi koji imaju isti oblik ali različnu veličinu, zovu se slični ($\sim$); likovi, koji imaju istu veličinu, a različna su oblika, zovu se jednaki ($=$); likovi, koji su istog oblika i jednake veličine, zovu se sukladni ili kongruentni ($\cong$).

Dva sukladna lika razlikuju se samo svojim položajem: oni se mogu jedan po drugomu tako položiti, da se sasvim prikriju. Lik 51. predstavlja četiri sukladna trokuta u različnijem položajima. Da ih po dva prikrijemo, morali bi jedan od njih paralelno pomicati, pa ako je potrebno, još i u ravnini okrenuti, ili ga iz ravnine dići pa onda okrenuti. Kako bi morali trokut I. micati, kad bi htjeli s njim trokute II. III. i IV. prikriti?

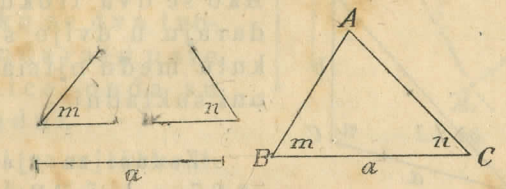


Lik 51.

One stranice i kutov dvaju sukladnih likova, kojii se prikriju, kad se likovi prikriju, zovu se istoimeni ili homologni dijelovi; takovi su u liku 51. istim slovima označeni.

§ 45. **Prva crtnja trokuta.** a) Nacrtaj trokut, ako je zadana jedna stranica i oba njezina priležeća kuta m i n (lik 52.).

Načini stranicu $BC = a$, pa na njezine krajne točke prenesi kute m i n i krakove produlji, dok se presijeku u A. Kako se vidi, trokut je ovim zadatkom izvjesno određen; t. j. ako se

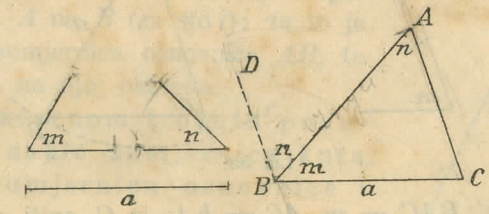


Lik 52.

od zadanih dijelova još i drugi koji trokut nacrta, to će se on od prvoga samo položajem svojim razlikovati.

b) Nacrtaj trokut, ako je zadana jedna stranica a, njezin priležeći kut m i njoj suprotan n (lik 53.)

Načini $BC = a$, $\sphericalangle CBA = m$, $\sphericalangle ABD = n$ pa potegni $CA \parallel BD$. — Trokut je ovim zadatkom izvjesno određen; svaki drugi, koji se s istim dijelovima nacrta, razlikuje se od prvoga samo svojim položajem. Iz toga slijedi:



Lik 53.

I. poučka sukladnosti: Ako se dva trokuta podudaraju u jednoj stranici i u dva kuta, onda su oni sukladni ili kongruentni.

„Dva se trokuta u jednom dijelu podudaraju" reći će „oni imaju taj dio jednak".

Zadaci za vježbu: 1. $a = 6{\cdot}2cm$, $m = 72^0$, $n = 48^0$.

2. $a = 5{\cdot}1cm$, $m = 105^0$, $n = 32^0$.

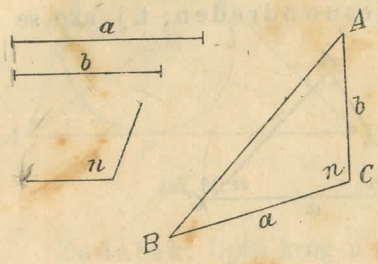
3. Prenesi zadani trokut pomoću jedne stranice i obaju njezinih priležećih kuta.

4. $a = 4{\cdot}5cm$, $m = 68^0$, $n = 60^0$.

5. $a = 7{\cdot}0cm$, $m = 45^0$, $n = 100^0$.

§. 46. **Druga crtnja trokuta.** Nacrtaj trokut, ako su zadane dvije stranice a, b i kut n među njima (lik 54.).

Na krakovima kuta n s vrha C odreži a i b pa spoji točke A i B. Iz toga slijedi:



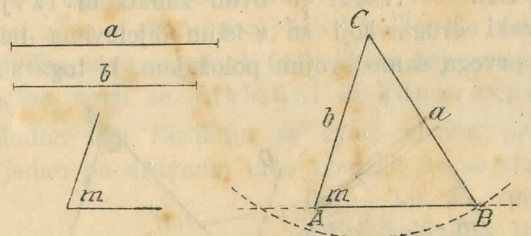
Lik 54.

II. poučka sukladnosti: Ako se dva trokuta podudaraju u dvije stranice i kutu među njima, onda su oni sukladni.

Zadaci za vježbu: 1. $a = 6{\cdot}7cm$, $b = 4{\cdot}3cm$, $n = 40^0$.
2. $a = 5{\cdot}8cm$, $b = 5{\cdot}2cm$, $n = 75^0$.

3. Prenesi zadani trokut pomoću dviju stranica i kuta među njima.

§. 47. **Treća crtnja trokuta.** Nacrtaj trokut, ako su zadane dvije stranice a, b i većoj (a) suprotan kut m (lik 55.).



Lik 55.

Načini $\sphericalangle BAC = m$, $AC = b$ te iz C opiši polumjerom a luk, koji siječe drugi krak kuta u B, pa spoji C sa B. Iz toga slijedi:

III. poučka sukladnosti: Ako se dva trokuta podudaraju u dvije stranice i u kutu većoj stranici suprotnom, onda su oni sukladni.

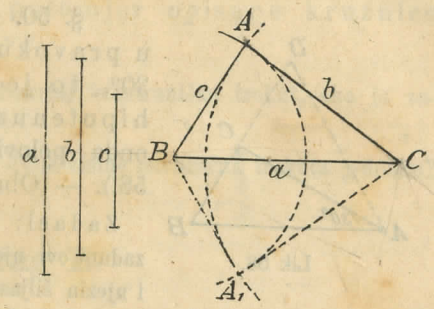
Zadaci za vježbu: 1. $a = 4{\cdot}7cm$, $b = 3{\cdot}2cm$, $m = 54^0$.
2. $a = 7{\cdot}3cm$, $b = 2{\cdot}9cm$, $m = 120^0$.

§. 48. **Četvrta crtnja trokuta.** Nacrtaj trokut, ako su zadane tri stranice a, b, c (lik 56.).

Načini $BC = a$, pa opiši luk iz C polumjerom b a iz B polumjerom c. Kojim uvjetima moraju tri stranice zadovoljiti, da

se mogu lukovi presjeći? — Oba su trokuta ABC i A_1BC, koji se ovdje dobiju, sukladna; dobije se dakle samo jedan izvjestan trokut. Iz toga slijedi:

IV. poučka sukladnosti: Ako se dva trokuta podudaraju u sve tri stranice, onda su oni sukladni.



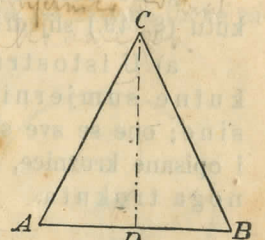
Lik 56.

Zadaci za vježbu: 1. $a = 6{\cdot}8cm$, $b = 5{\cdot}7cm$, $c = 4{\cdot}6cm$.
2. $a = 2{\cdot}7cm$, $b = 6{\cdot}4cm$, $c = 5{\cdot}5cm$.
3. Prenesi zadani trokut pomoću triju stranica.

Osobiti trokuti.

§. 49. **Istokračni trokut.** Neka je ABC (lik 57.) istokračan trokut ($AC = BC$) a CD sumjernica kuta C na vrhu. Ako se trokut oko pravca CD okrene, to će pasti B na A a A na B (za što?); za to je CD također sumjernica osnovnice AB, te je kao takova na njoj okomita.

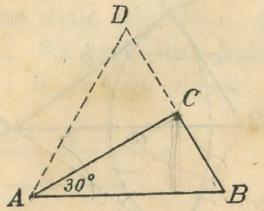
U istokračnom trokutu podudaraju se dakle sumjernica kuta na vrhu, sumjernica osnovnice i visina.



Lik 57.

Dva lika, kao što su trokuti ACD i BCD, koja se okretom oko jednoga pravca mogu prikriti zovu se sumjerni ili simetrični s obzirom na taj pravac. Svaki lik, koji se može jednim pravcem u dvije sumjerne polovine razdijeliti, zove se sumjeran lik, a polovnica zove se os. Istokračan trokut je dakle sumjeran lik.

Zadaci: Nacrtaj istokračan trokut, ako su zadani ovi njegovi dijelovi: 1. osnovnica i jedan njezin prikut, 2. osnovnica i kut na vrhu, 3. jedan krak i kut pri osnovnici, 4. jedan krak i kut na vrhu, 5. osnovnica i jedan krak. (U drugom zadatku uvaži, da je kut A (lik 57.) s polovinom zadanoga kuta C komplementan kut.)



Lik 58.

§. 50. **Pravokutni trokut.** Ako je u pravokutnom trokutu jedan kut 30^0, to je manja kateta polovina hipotenuze. Pravokutan trokut je na ime onda polovina istostraničnoga trokuta (lik 58.). — Obratno?

Zadaci: 1. Nacrtaj pravokutni trokut, ako su zadani ovi njegovi dijelovi: a) jedna kateta ($3cm$) i njezin šiljasti priležeći kut (40^0), b) jedna kateta ($2cm$) i njoj suprotan kut (65^0), c) hipotenusa ($6cm$) i jedan njezin priležeći kut (15^0), d) obje katete ($3cm$, $4cm$), e) hipotenuza ($5cm$) i jedna kateta ($3cm$).

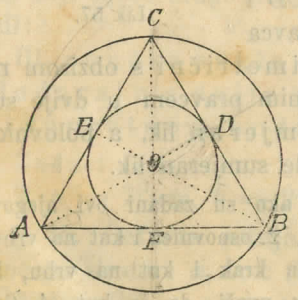
2. Nacrtaj istokračan trokut, ako je zadana visina ($4cm$) i a) jedan kut pri osnovnici (25^0). b) kut na vrhu (30^0), c) osnovnica ($6\ cm$), d) jedan krak ($5{\cdot}5cm$).

3. Nacrtaj istokračan pravokutan trokut, ako je zadana a) kateta ($2{\cdot}7cm$). b) hipotenuza ($8cm$), c) visina ($4cm$).

4. Nacrtaj pravokutan trokut, ako je poznata visina ($5.4cm$) hipotenuzi pripadajuća) i a) jedan šiljast kut (45^0), b) jedna kateta ($6{\cdot}5cm$)

§. 51. **Istostranični trokut.** Iz poučke o istokračnom trokutu (§. 49.) slijedi:

a) U istostraničnom trokutu podudaraju se tri kutne sumjernice, tri sumjernice stranica i tri visine; one se sve sijeku u jednoj točci, koja je središte upisane i opisane kružnice, te se s toga zove središte istostraničnoga trokuta.



Lik 59.

b) Tri visine dijele istostranični trokut ABC (lik 59.) na šest sukladnih pravokutnih trokuta, jer se po dva susjedna od tih trokuta mogu okretanjem oko sumjernice prikriti. U jednom od tih trokuta, n. pr. u AOF je $\sphericalangle FAO = 30^0$, dakle $OF = \frac{1}{2}OA$ a za to također:

$$OD = \tfrac{1}{2}OA = \tfrac{1}{3}AD \text{ i } OA = \tfrac{2}{3}AD.$$

U istostraničnom je trokutu dakle polumjer upisane kružnice jednak $\frac{1}{3}$, a polumjer opisane kružnice jednak $\frac{2}{3}$ visine trokutove.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj istostraničan trokut, ako je zadana visina (n. pr. $3cm$).

2. Kako bi dokazao, da su dvije visine istokračna trokuta jednake?

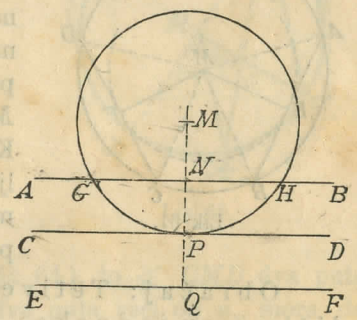
Krug B.

§. 52. **Položaj točke prema krugu.** Točka, koja nije u obodnici kruga, ili je u krugu ili je izvan njega. Točka je u krugu, kad joj je daljina od središta manja od polumjera; ona je izvan kruga, ako je njezina daljina od središta veća od polumjera.

Zadatak: Odredi točku, koja će imati od zadane točke zadanu daljinu.

Zadatak ovaj je neodređen ili neizvjestan, jer ima nebrojeno mnoštvo točaka, koje izrečenomu zahtjevu zadovoljavaju; sve su ove točke u kružnici, kojoj je zadana točka središte, a zadana daljina polumjer. Veli se također: Kružnica je mjerstveno mjesto svih točaka, koje imaju od zadane točke zadanu daljinu.

§. 53. **Pravac i krug.** Položaj pravca prema krugu može biti trostruk, već prema tomu, da li je daljina pravca od središta kruga manja od polumjera, ili je ona jednaka polumjeru, ili je veća od polumjera (Lik 60.). U prvom slučaju je pravac sječicom ili sekantom kruga, te ima s obodnicom dvije točke zajedničke; u drugom slučaju je on dirnicom ili tangentom kruga, te ima s krugom samo jednu točku zajedničku, koja se zove diralište; u trećem slučaju je on sasvim izvan kruga, t. j. nema s krugom ni jedne točke zajedničke.



Lik 60.

*

§. 54. **Svojstva tetiva.** a) Središte kruga ima od krajnih točaka tetive jednake daljine; iz toga slijedi:

Sumjernica svake tetive u krugu ide njegovim središtem. Na toj se poučci osniva crtnja središta kružnice, koja ima ići zadanim točkama.

Zadaci: 1. Nacrtaj krružnicu, koja ide dvjema zadanim točkama. — Neodređen zadatak.

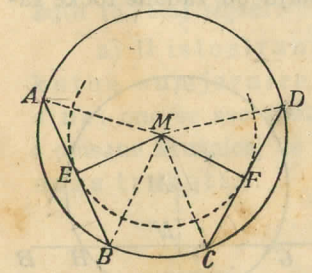
3. Nacrtaj kružnicu, koja ide trima zadanim točkama. — Taj se zadatak podudara s ovim: Oko zadanoga trokuta opiši kružnicu. (§. 40., lik 46.)

3. Nađi središte zadane kružnice ili kružnoga luka. — Odaberi na zadanoj kružnici ili luku tri točke, pa crtaj kao u predašnjem zadatku.

b) Ako tetivi pripadajući luk ima 60^0, kao onaj CD (lik 61.), to je trokut CDM istostraničan (za što?); iz toga slijedi:

Tetiva sekstanta jednaka je polumjeru.

Prenesi tu tetivu po opsegu kruga, koliko puta možeš.



Lik 61.

§. 55. **Snošaji između tetiva i njihovih daljina od središta.** Jednakim tetivama kruga pripadaju jednake daljine od središta. Ako su na ime tetive AB i CD (lik 61.) jednake, to će se trokuti ABM i CDM prikriti, ako jedan od njih oko točke M okrenemo (V. poučka sukladnosti). Kod toga prikrit će se i središnje daljine ME i MF, jer se s jedne točke može na pravac samo jedna okomica potegnuti; dakle je $ME = MF$.

Obraćaj: Tetive jednakih daljina od središta jesu jednake.

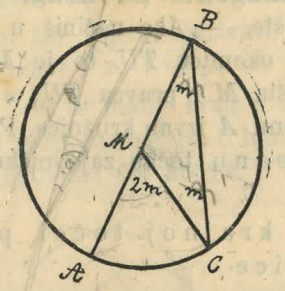
§. 56. **Obodnični kut.** Kut, kojemu je vrh u obodnici kruga, a kraci su mu tetive, zove se obodnični kut; dio kružnice, koji je u kutnoj plohi, zove se pripadajući luk.

Da možeš prosuditi veličinu obodničkoga kuta, isporedi ga sa središnjim kutom, koji je s njim na istom luku. Tu razlikuj

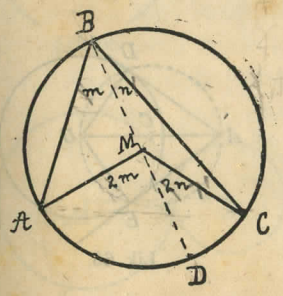
tri slučaja prema tomu, da li je središte kruga na jednom kraku ili između krakova ili izvan krakova obodničnoga kuta.

1. U trokutu AMB (lik 62.) kuti sa m označeni, jesu jednaki, za to je središnji kut AMC dva puta tolik, kolik obodnični kut ABC, jer je on izvanji kut trokuta AMC.

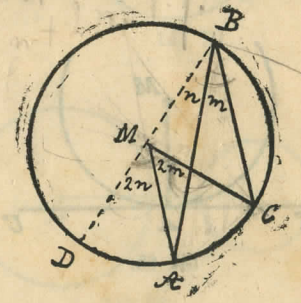
2. Promjer BD (lik 63..) dijeli obodnični kut na m i n, a središnji na $2m$ i $2n$, s toga je AMC dva puta tolik, kolik kut ABC.



Lik 62.



Lik 63.



Lik 64.

3. Potegneš li promjer BD (lik 64.), to $\sphericalangle CMD$ dva puta veći od $m + n$; pošto je AMD dva puta veći od n, mora da je $\sphericalangle AMC$ dva puta veći od m. Iz toga slijedi:

a) Obodnični kut je polovina središnjega kuta, koji pripada istomu luku.

b) Svi su obodnični kuti nad istim lukom ili nad jednakim lukovima među sobom jednaki.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj obodnični kut, koji pripada zadanomu luku, n. pr. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ obodnice.

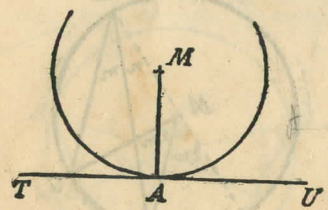
2. Dokaži pomoću prve poučke, da je polukružni kut pravi.

3. Nacrtaj u zadanom krugu više obodničnih kutova od 30^0 nad istim lukom.

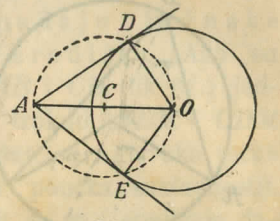
§. 57. **Crtnja tangente na krug.** a) Nacrtaj tangentu, ako je zadano diralište. — Ako načiniš u krajnoj točci A polumjera MA (lik 65.) okomicu TU, to je MA najkraći od svih pružaca između središta M i pravca TU; s toga je svaka točka pravca TU izuzevši onu A izvan kružnice. Pravac TU ima dakle s kružnicom samo jednu točku zajedničku ili on je tangenta kružnice:

Okomica u krajnoj točci polumjera jest tangenta kružnice.

b) Iz jedne točke izvan kruga potegni na krug tangentu — Zadanu tačku A (lik 66.) i središte O spoji, te nad AO



Lik 65.

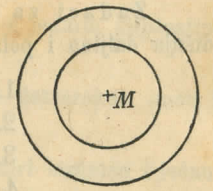


Lik 66.

kao promjerom nacrtaj kružnicu, koja zadanu kružnicu siječe u točkama D i E. AD i AE su tražene tangente; za što? — Ovaj zadatak dopušta dakle dvije rješidbe.

Zadatak za vježbu: 1. Zadan je krug polumjera $r = 2{\cdot}1cm$ i jedna točka daljine a) $\frac{3}{2}r$, b) $2r$ od središta; nacrtaj tangente iz one točke na krug.

§. 58. **Međusobni položaj dvaju krugova.** Krugovi, koji imaju isto središte, zovu se susredišnji ili koncentrični (lik 67.); ploha omeđena dvjema susredišnjim kružnicama zove se kružni vijenac.



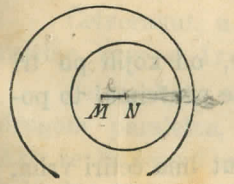
Lik 67.

Dva kruga, koji imaju različna središta, zovu se inosredišnji ili ekscentrični (lik 68. do 72.).

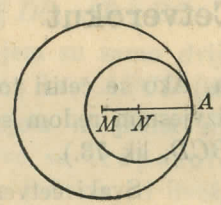
Pravac određen objema središtima zove se središnjica ili centrala, a udaljenost obaju središta zove se središnja daljina.

Mi ćemo u ovom, što slijedi, nazivati središnju daljinu c, polumjere obaju krugova r i r_1 i uzeti, da je $r > r_1$.

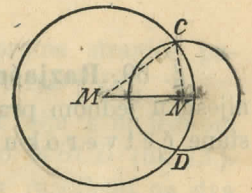
Ako pomišljamo, da se manji krug u liku 67. miče, to će on prema većemu po redu zauzeti pet bitno različnih položaja, koji su predstavljeni likovima 68. do 72.



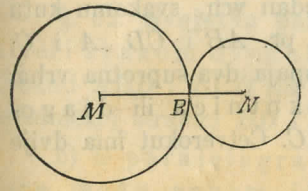
Lik 68.



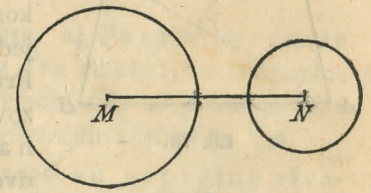
Lik 69.



Lik 70.



Lik 71.



Lik 72.

U liku 68. manji je krug sav u većem. U liku 69. dotiču se krugovi iznutra; ovdje je $MN = MA - NA$ ili $c = r - r_1$, dakle je u liku 68. $c < r - r_1$. — Riječima?

U liku 70. sijeku se kružnice, te se iz trokuta MNC vidi, da je $r + r_1 > c > r - r_1$ (§. 31.). — Riječima?

U liku 71. dotiču se krugovi izvana; ovdje je $c = r + r_1$. U liku 72. svaki je od oba kruga sav izvan drugoga; ovdje je očito $c > r + r_1$. — Riječima?

Zadaci za vježbu: Nacrtaj dva kruga, ako je zadana središnja daljina i polumjeri (u centimetrima):

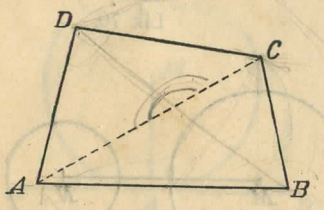
1. $c = 4{\cdot}1$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}4$;
2. $c = 0{\cdot}7$, $r = 2{\cdot}2$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
3. $c = 3{\cdot}4$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}4$;
4. $c = 0{\cdot}8$, $r = 2{\cdot}1$, $r_1 = 1{\cdot}3$;
5. $c = 0$, $r = 1{\cdot}9$, $r_1 = 1{\cdot}2$;
6. $c = 1{\cdot}5$, $r = 2{\cdot}0$, $r_1 = 1{\cdot}5$;
7. $c = 2{\cdot}5$, $r = 1{\cdot}7$, $r_1 = 1{\cdot}7$;

8. Odredi u prijašnjim slučajevima položaj krugova računom.

9. $r = 5$, $r_1 = 4cm$; koliko je c, ako se krugovi dotiču izvana, iz nutra?

Četverokut.

§. 59. **Razjašnjenja.** Ako se četiri točke, od kojih po tri nijesu u jednom pravcu, izvjesnim redom spoje pruščima, to postane četverokut (*ABCD*, lik 73.).



Lik 73.

Svaki četverokut ima četiri vrha, četiri stranice i četiri kuta. Svakoj je stranici na suprot jedna stranica, svakomu vrhu jedan vrh, svakomu kutu jedan kut; n. pr. *AB* i *CD*, *A* i *C*. Pružac, koji spaja dva suprotna vrha, zove se dvokutnica ili diagonala, kao *AC*. Četverokut ima dvije dvokutnice.

§. 60. **Poučka o kutovima.** Dvokutnica dijeli četverokut dupljastih kutova na dva trokuta, u kojima kutovi čine skupa kute četverokuta, iz toga slijedi:

Zbroj kutova u četverokutu čini četiri prava kuta ili 360°.

U četverokutu može biti najviše samo jedan pupčast kut; za što? — U ovom, što slijedi, promatrat ćemo samo četverokute sa dupljastim kutovima.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj četverokut s jednim pupčastim kutom.

2. Koliko šiljastih i koliko tupih kutova može četverokut imati? — Nacrtaj moguće slučajeve.

3. Nacrtaj četverokut, ako su zadane: a) sve četiri stranice i jedan kut (3. 4, 4, 5*cm*, $A = 90°$), b) sve četiri stranice i dvokutnica (5, 4, 3, 6, 4*cm*), c) tri stranice i oba od njih okriljena kuta (3·5, 3, 3*cm*, 90°, 120°), d) tri stranice i obje dvokutnice (4, 5·5, 5, 5, 3*cm*).

4. Iz tri zadana kuta četverokuta izračunaj četvrti, n. pr.:

a) 64° 37′, 84° 12′, 113° 48′; b) 67°, 45°, 36°.

5. Opredijeli zbroj izvanjih kutova četverokuta (gledaj §. 32., c).

§. 61. **Razdjelba četverokuta.** Četverokut u kojem su po dvije suprotne stranice paralelne, zove se paralelogram, kao *ABCD* (lik 74.); $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$.

Četverokut, u kojem su samo dvije suprotne stranice paralelne, zove se trapez kao *ABCD* (lik 79.); $AB \parallel DC$.

Četverokut, u kojem ni jedna stranica nije s ni jednom drugom paralelna, zove se trapezoid, kao *ABCD* (lik 73.). Ako se trapezoid može jednom od dvokutnica razdijeliti na dva sukladna trokuta, onda se on zove deltoid, kao *ABCD* (lik 82.); ovdje je $AB = BC$, $AD = CD$.

§. 62. **Svojstva paralelograma.** a) Paralelogram se dijeli svakom dvokutnicom na dva sukladna trokuta. Trokuti *ABD* i *BCD* (lik 74.) su sukladni, jer se podudaraju u zajedničkoj stranici *BD* i njezinim priležećim kutima *m* i *n*.

b) U paralelogramu po dvije su suprotne stranice među sobom jednake; $AB = CD$, $AD = BC$. Slijedi iz a).

c) U paralelogramu po dva suprotna kuta među sobom jednaka; $\sphericalangle A = C$, $\sphericalangle B = D$. (Slijedi iz a).

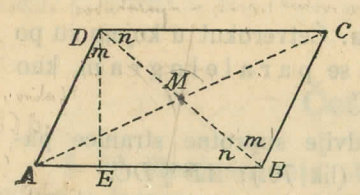
d) Dvokutnice paralelogramu se prepolovljuju. Ako je na ime *M* sjecište obiju dvokutnica, to se mogu trokuti *ABM* i *CDM* prikriti na taj način, da se okretanjem u ravnini sastavi *AB* sa *CD* (I. poučka sukladnosti), onda pada *AM* na *CM* i *BM* na *DM*. Dakle je $AM = CM$ i $BM = DM$.

e) Ako su u četverokutu dvije suprotne stranice

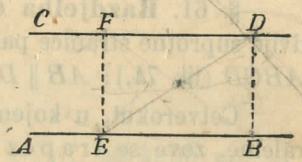
jednake i paralelne, to je on paralelogram. Ako je n. pr. $AB = DC$ i $AB \parallel DC$, to je $\triangle ABD \cong CBD$ (III. poučka sukladnosti), dakle $\sphericalangle ADB = CBD$ i $AD \parallel BC$.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj paralelogram ako su zadane: a) dvije susjedne stranice 4, 3cm i kut među njima 110°, b) dvije susjedne stranice 4·5, 3·6cm i jedna dvokutnica 5cm, c) obje dvokutnice 6, 5 cm i jedna stranica 3cm, d) obje dvokutnice i jedan njima okriljeni kut (5, 6cm, 100°),

2. Iz jednog kuta paralelograma izračunaj ostale, n. pr. 66° 23′ 42″.



Lik 74.



Lik 75

§. 63. **Daljina dviju usporednica.** Jednakost suprotnih stranica paralelograma izrazuje se jošte ovako:

a) Usporednice omeđene dvjema usporednicama jednake su.

Ako je $AB \parallel CD$ (lik 75.), pa ako se potegnu iz kojih god dviju točaka B i E jednoga pravca okomice na drugi pravac, to su one jednake, $BD = EF$; za što? — Dakle imaju sve točke jednoga pravca jednake udaljenosti od drugoga. Koja god od tih okomica zove daljina usporednica.

b) Sve točke, koje imaju od nekoga pravca na istoj strani jednake daljine, nalaze se u usporednici sa zadanim pravcem (mjerstveno mjesto onih točaka).

U paralelogramu može se svaka stranica smatrati osnovnicom. Daljina osnovnice od stranice s njom paralelne zove se visina: n. pr. DE je visina s obzirom na AB kao osnovnicu (lik 74.).

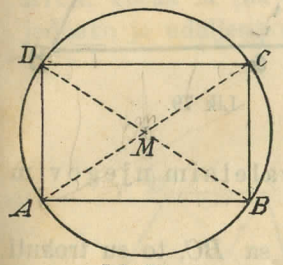
Zadatak za vježbu: Nacrtaj pravokutan trokut, ako je zadana hipotenuza (5cm.) i njoj pripadajuća visina (2cm).

§. 64. **Razdjelba paralelograma.** Ako je jedan kut paralelograma prav, onda je svaki njegov kut prav, a paralelogram zove se pravokutnik. Ako su dvije susjedne stranice jednake, onda su sve četiri jednake, a paralelogram zove se istostraničan.

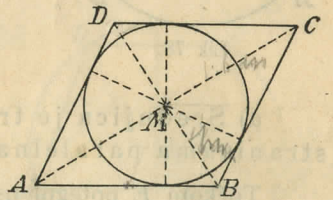
Pravokutni paralelogram zove se također pravokutnik, a istostraničan zove se kosa četvorina ili romb. Ako je paralelogram pravokutan i istostraničan, to se on zove četvorina ili kvadrat; ako je kosokutan i raznostraničan, zove se romboid.

§. 65. **Pravokutnik.** U pravokutniku (lik 76.) trokuti ABC i ABC sukladni su; za što? — Iz toga slijedi, da su dvokutnice među sobom jednake, $AC = BD$. Iz toga slijedi, da su i polovine dvokutnica jednake ili sjecište M dvokutnica ima od vrhova jednake daljine. Oko svakoga pravokutnika može se dakle kružnica opisati.

Zadaci za vježbu: Nacrtaj pravokutnik, ako su zadane: a) dvije susjedne stranice 4, 3cm, b) jedna stranica i dvokutnica 4, 5cm, c) dvokutnica i jedan dvokutnicama okriljeni kut 7cm, 60°.



Lik 76.



Lik 77.

§. 66. **Romb.** U rombu (lik 77.) je jedna dvokutnica sumjernicom druge. — Iz toga slijedi, da su dvokutnice jedna na drugoj okomite i da dijele romb na četiri sukladna trokuta.

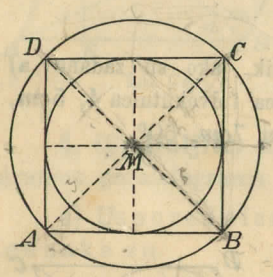
Svaka dvokutnica romba također je sumjernicom obaju kutova, koje presijeca. — Dakle točka M ima od svih stranica jednake daljine, te se s toga u svaki romb može krug upisati.

Zadaci za vježbu: Nacrtaj romb, ako je zadana: a) stranica (3*cm*), i jedan kut (120°), b) stranica i jedna dvokutnica (4, 2*cm*), c) obje dvokutnice (3, 7*cm*).

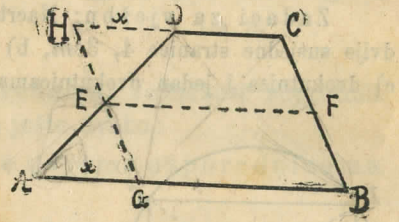
§. 67. **Četvorina** ili **kvadrat** U četvorini (lik 78.) su dvokutnice među sobom jednake i okomite. U četvorinu se može kružnica upisati i oko nje opisati. Točka *M* je središte četvorine.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj četvorinu, ako je zadana: a) stranica (4*cm*), b) dvokutnica (6*cm*). — 2. U kojem su paralelogramu dvokutnice jednake; u kojem je jedna na drugoj okomita?

§. 68. **Svojstva trapeza.** U trapezu možemo svaku od paralelnih stranica smatrati osnovnicom; njihova daljina je visina trapeza. Pružac, koji spaja polovišta neparalelnih stranica ili krakova, zove se srednjica (*EF*, lik 79.).



Lik 78.



Lik 79.

a) Srednjica je trapeza sa paralelnim njegovim stranicama paralelna.

Točkom *E* potegni usporednicu *GH* sa *BC*, to su trokuti *AGE* i *DEH* sukladni (za što?) — Iz toga slijedi $GE = EH$. Pošto je lik *BCHG* paralelogram, to je $GH = BC$, dakle i $\frac{GH}{2} = \frac{BC}{2}$ t. j. $GE = BF$. Lik *BFEG* jest dakle paralelogram jer ima dvije suprotne stranice paralelne i jednake, t. j. $EF \parallel AB \parallel CD$.

b) Srednjica trapeza jednaka je poluzbroju paralelnih stranica.

Iz sukladnosti trokuta *AGE* i *DHE* slijedi $AG = DH = x$. Iz lika se vidi da je *EF* dva puta manje od zbroja pružaca

BG i *CH*; no *BG* je isto što *AB* manje x a *CH* je isto što *CD* više x, dakle $EF = \frac{AB - x + CD + x}{2}$ ili $EF = \frac{AB + CD}{2}$.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj trapez, ako su zadane sve četiri stranice. — Najprije nacrtaj trokut *BCE* (lik 80) od razlike paralelnih stranica i od oba kraka.

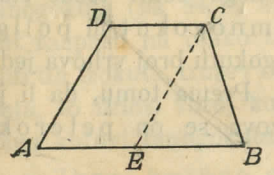
2. Nacrtaj trapez, ako su zadane tri stranice (5, 3, 4 *cm.*) i a) jedan dvjema od njih okriljeni kut 50°, b) jedna dvokutnica (7*cm*), c) visina (4*cm*). — Razlikuj, da li su od zadanih stranica obje paralelne ili ne.

3. Iz dva zadana kuta trapeza (koji ne smiju biti na jednom kraku) izračunaj ostale, n. pr. 63°, 96°.

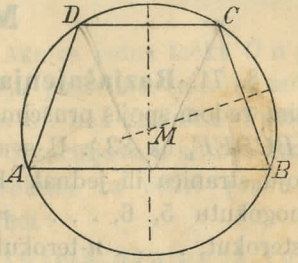
§. 69. **Istokračni trapez.** Ako su u trapezu oba kuta na jednoj od paralelnih stranica jednaka, to je sumjernica paralelne stranice ujedno os trapeza. (Dokaz okretanjem oko osi). Iz toga slijedi jednakost kutova na drugoj paralelnoj stranici i jednakost obaju krakova.

Trapez, u kojem su obje neparalelne stranice (kraci) jednake, zove se istokračan ili sumjeran (simetričan).

Oko istokračnog trapeza može se opisati kružnica. Točka *M* (lik 81.) kao sjecište smetala stranica *BC* i *DC* jednako je udaljena od *A*, *B*, *C* i *D*.



Lik 80.



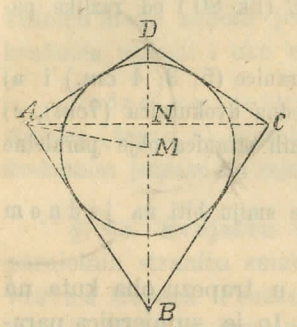
Lik 81.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj istokračan trapez, ako su zadane paralelne stranice 6, 3*cm*, i a) jedan krak 3*cm*, b) jedan kut 80°, c) visina 4*cm*.

2. Nacrtaj istokračan trapez, ako je zadana veća paralelna stranica 5*cm*, jedan krak 3*cm* i a) jedan šiljasti kut 60°, b) jedan tup kut 120°, c) dvokutnica 8*cm*, d) visina (5*cm*).

3. Iz jednoga zadanoga kuta istokračnoga trapeza izračunaj ostale kute, n. pr. 58° 17′ 45″.

§. 70. **Svojstva deltoida.** Deltoid *ABCD* (lik 82.) dijeli se dvokutnicom *BD* na dva sukladna trokuta, koji se mogu okretanjem oko *BD* prikriti. Deltoid je dakle simetričan lik, i jedna dvokutnica (*BD*) je sumjernica njegova; ona polovi drugu dvokutnicu *AC* pravokutno i polovi kute *B* i *D*. (Dokaz okretanjem oko osi). Ako nacrtamo sumjernicu kuta *A*, to ćemo dobiti na *BD* točku *M*, koja je od svih stranica deltoida jednako udaljena. Iz toga slijedi:



Lik 82.

U svaki se deltoid može upisati krug.

Zadaci za vježbu: Nacrtaj deltoid, ako su zadane: 1. dvije nejednake stranice 5, 3*cm*, i jedna dvokutnica (8*cm*).

2. Iz dva (nejednaka) kuta deltoida izračunaj ostale, n. pr. 116°, 92°. — Razlikuj, da li su zadani kuti susjedni ili pak suprotni.

3. Upiši krug u zadani deltoid.

Mnogokut.

§. 71. **Razjašnjenja.** Ako više nego četiri točke stanovitim redom spojiš pruščima, dobit ćeš mnogokut ili poligon (*ABCDEF*, lik 83.). U svakom je mnogokutu broj vrhova jednak broju stranica ili jednak broju kutova. Prema tomu, da li je u mnogokutu 5, 6, ... *n* stranica, zove se on peterokut, šesterokut, ... *n*-terokut.

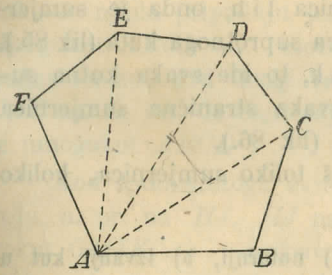
U širem smislu pribrajamo k mnogokutima također trokute i četverokute. U ovom, što slijedi, promatrat ćemo samo mnogokute sa dupljastim kutovima.

§. 72. **Dvokutnice.** Pružac, koji spaja dva ne susjedna vrha u mnogokutu, zove se dvokutnica ili diagonala.

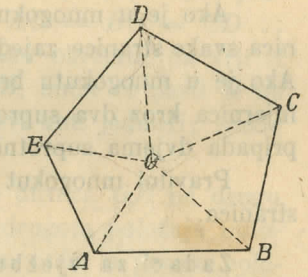
Ako se iz jednoga vrha u mnogokutu potegnu sve moguće dvokutnice, to preostanu tri vrha, ka kojima se ne može ni jedna potegnuti; to je na ime onaj prvi vrh sâm pa onda njegova dva susjedna. S toga je broj dvokuutnica iz jednog vrha za tri manji nego broj stranica mnogokuta (u *n*-terokutu *n*—3).

Zadatak: Izračunaj broj svih dvokutnica u nekom *n* terokutu. — U osmerokutu možeš n. pr. potegnuti iz jednoga vrha 5 dvokutnica, dakle iz svih vrhova svega 5.8 = 40. Kod toga si potegao svaku dvokutnicu po dva puta, na ime iz svake njezine krajne točke; dakle je broj svih mogućih dvokutnica u osmerokutu = 20. (U *n*-terokutu = $\frac{n.(n-3)}{2}$).

Zadatak za vježbu: Izračunaj broj svih dvokutnica u 5-, 6-, 7-, 10-, i 12-terokutu.



Lik 83.



Lik 84.

§. 74. **Poučka u kutovima.** Ako se jedna točka *O* u plohi mnogokuta (lik 84.) i svi vrhovi spoje pruščima, to će se mnogokut raspasti na toliko trokuta, koliko on ima stranica. Pošto svi kuti tih trokuta, izuzev one oko točke *O*, sačinjavaju kutove mnogokuta, to iznosi zbroj kutova svih trokuta za četiri prava više nego kutovi mnogokuta; iz toga slijedi:

Zbroj kutova u mnogôkutu ima dva puta toliko pravih kutova, koliko ima mnogokut stranica, manje četiri prava (u *n*-terokutu 2 *n R* — 4 *R*).

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj zbroj kutova u 5-, 6-, 7-, ... 12-, 16-, 24-kutu.

2. Zbroj izvanjih kutova mnogokuta ima četiri prava; za što? — (Gledaj §. 32., c).

§. 74. **Pravilni mnogokut, sumjernost njegova.** Ako su u mnogokutu sve stranice jednake i svi kuti jednaki, onda se on zove pravilan ili regularan.

a) Sumjernica svake stranice u pravilnom mnogokutu zajedno je i sumjernica mnogokuta.

Ako je na ime *FM* (lik 85.) sumjernica stranice *AB*, to se može *FAED* oko *FM* okrenuti tako, da se *A* sa *B* sastane; onda će se prikriti također *AE* i *BC*, jer su kuti *A* i *B* jednaki; točke *C* i *E* sastaju se, jer su stranice jednake, itd.

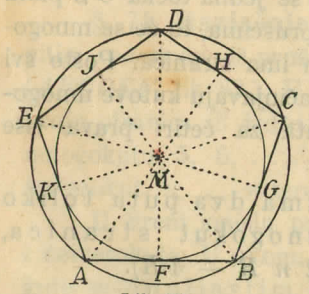
b) Sumjernica svakoga kuta u pravilnom mnogokutu zajedno je i sumjernica mnogokuta.

Ako je na ime *AM* (lik 85.) sumjernica kuta *A*, to se može *AEDH* oko *AM* okrenuti tako, da se *AB* i *AE* prikrije; onda će pasti točka *B* na *E*, jer su stranice jednake, tako isto *BC* i *ED*, jer su kuti *B* i *E* jednaki, itd.

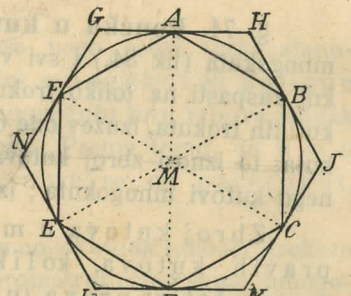
Ako je u mnogokutu broj stranica lih, onda je sumjernica svake stranice zajedno i sumjernica suprotnoga kuta (lik 85.). Ako je u mnogokutu broj stranica tâk, to ide svaka kutna sumjernica kroz dva suprotna vrha, a svaka stranična sumjernica pripada dvjema suprotnim stranicama (lik 86.).

Pravilni mnogokut ima dakle baš toliko sumjernica, koliko stranica.

Zadaci za vježbu: Kolik je a) nutarnji, b) izvanji kut u pravilnom 5-, 6-, 7-, ... 12-, 16-, 24-kutu?



Lik 85.



Lik 86.

§. 75. **Pravilni mnogokut i krug.** a) Oko svakoga pravilnoga mnogokuta može se kružnica opisati i u svaki se pravilan mnogokut može ona upisati.

Sumjernica *FM* stranice *AB* (lik 85.) siječe na ime sumjernicu *GM* stranice *BC* u točci *M*, koja je od tri vrha *A*, *B*, *C* jednako udaljena. Pošto su dalje *C* i *E* sumjerne točke s obzirom na *FM*, to je *CM* = *EM*; pošto su još *A* i *D* s obzirom na *GM* sumjerne točke, to je *AM* = *DM*. Dakle je *M* središte kružnice, koja ide kroz sve vrhove mnogokuta.

Jednakim tetivama pripadaju jednake daljine od središta, dakle je *FM* = *GM* = *HM* = ... , t. j *M* je središte drugoga nekoga kruga, koji dira sve stranice mnogokuta. Točka *M* zove se za to središte pravilnoga mnogokuta.

b) Ako se obodnica kruga razdijeli na jednake dijelove, to su djelišta vrhovi upisana pravilna mnogokuta ali ujedno i dirališta stranica opisana pravilna mnogokuta.

Ako su naime lukovi *AB*, *BC*, *CD* . . . . . (lik 86.) jednaki, to njima pripadaju jednake tetive: *AB* = *BC* = *CD* . . . Mnogokut *ABCD* . . . može se oko *M* tako okretati, da vrh *A* padne na koji god drugi vrh, n. pr. na *B*, onda će pasti *B* na *C*, *C* na *D*, itd. Iz toga slijedi, da su i svi kuti jednaki; dakle je mnogokut *ABCD* . . . . pravilan.

Kod spomenutoga okretanja past će dirnica *GH* na drugu koju, n. pr. na *HJ*, *HJ* na *JK*, itd. U drugom položaju mnogokut *GHJK* . . . . prikrivat će se sasvim onim u prvom položaju; s toga su stranice i kutovi toga mnogokuta jednaki. Mnogokut *GHJK* . . . . dakle je pravilan.

Zadaci: 1. U zadani krug upiši i oko njega opiši istostraničan trokut. (Razdijeli kružnicu na 3 jednake česti).

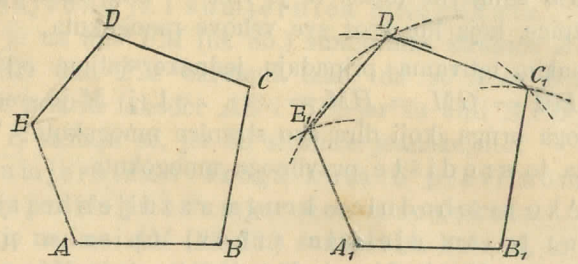
2. U zadani krug upiši i oko njega opiši kvadrat. (Razdijeli kružnicu na 4 jednake česti).

3. U zadani krug upiši i oko njega opiši pravilan šesterokut. (Prenesi na kružnici polumjer 6 puta kao tetivu).

Zadaci za vježbu: U zadani krug upiši i oko njega opiši pravilan: 1. osmerokut, 2. dvanaesterokut, 3. peterokut, 4. deseterokut. — U 3. i 4. primjeru izvedi dijeljenje obodnice pokusom.

§. 76. **Prenošanje mnogokuta.** Zadatak: Nacrtaj mnogokut, koji je sa zadanim sukladan (prenošanje mnogokuta).

Riješenje: Načini (lik 87.) $A_1B_1 = AB$, pa iz A_1 polumjerom AC i iz B_1 polumjerom BC opiši lukove, koji se u točci C_1 sijeku; tako isto nađi točke D_1, E_1, itd. — Dokaz prikrivanjem.



Lik 87.

Zadaci za vježbu: Prenesi neki mnogokut tako, da će se moći novi zadanim prikriti: 1. paralelnim pomicanjem, 2. okretanjem oko zadanoga pravca, n. pr. oko jedne stranice, 3. poluokretom oko zadane točke, n. pr. oko jednoga vrha.

Jednakost ploština.

§. 77. **Razjašnjenja.** Onaj dio ravnine, koji je okriljen međašnim crtama ravnoga lika, zove se ploha lika. (Ploha trokuta, kruga itd.). Veličina plohe zove se ploština ili plošni sadržaj lika. Dva su lika plošno jednaka ili u kratko jednaka (=), kad imaju jednaku ploštinu; u protivnom slučaju su oni nejednaki ($<$ ili $>$).

Ispoređivanje plohâ osniva se poglavito na ovim po sebi već jasnim poučkama:

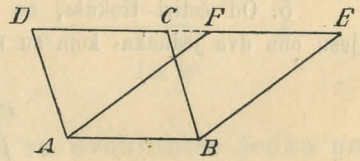
1. Dva sukladna lika također su jednaka. Iz toga slijedi, da se paralelogram dvokutnicom a pravilan mnogokut sumjernicom bud stranice ili kuta dijeli na dva jednaka dijela.

2. Zbrajanjem (sastavljanjem) dvaju zadanih likova mogu se na različne načine novi likovi stvarati, koji će biti jednaki, ali ipak neće biti uvijek sukladni. Kôliko likova različna oblika ali iste veličine može se n. pr. dobiti, ako se dva sukladna pravokutna trokuta na jednakim stranicama sastave?

3. Odbijanjem (oduzimanjem) zadanoga lika od drugoga kojega zadanoga lika mogu se na različne načine jednaki ali u opće nesukladni likovi dobiti.

Pod pravokutnikom dvaju pružaca razumijevamo onaj pravokutnik, u kojem su oba prušca stranice. Nad nekim pruščem nacrtana četvorina zove se četvorina toga prušca.

§. 78. **Paralelogram.** Ako imaju dva paralelograma jednake osnovnice i jednake visine, to se oni mogu tako sastaviti, da se osnovnice sasvim prikriju, a suprotne stranice da padnu u jedan pravac (lik 88.) Ovdje je $\triangle AFD \cong BEC$ (za što?). Ako se od trapeza $ABED$ oduzme trokut AFD, to preostane paralelogram $ABEF$; oduzme li se od istoga trapeza trokut BEC, t. j. trokut AFD samo u drugom položaju, to preostane paralelogram $ABCD$. Dakle je $ABCD = ABEF$.



Lik 88.

Paralelogrami jednakih osnovnica i jednakih visina među sobom su jednaki. Iz toga slijedi:

Svaki paralelogram jednak je pravokutniku, koji ima s njim istu osnovnicu i istu visinu.

Zadaci za vježbu: Opetuj prijašnje razmatranje pretpostavivši, da se točke C i F sastaju, ili da se F nalazi između C i D:

Obrazloži ove poučke:

2. Ako se pomiče jedna stranica paralelograma pravcem, koji ide kroz tu stranicu, to ostaje ploština paralelograma nepromijenjena.

3. Od dva paralelograma jednakih osnovnica a različnih visina onaj je veći, koji ima veću visinu.

4. Od dva paralelograma jednakih visina a različnih osnovnica onaj je veći, koji ima veću osnovnicu.

§. 79. **Trokut.** Trokut ABC (lik 89.) polovina je paralelograma $ABCD$, koji ima s njim istu osnovnicu i istu visinu.

Svaki je trokut polovina paralelograma s istom osnovnicom i istom visinom. Iz toga slijedi:

Trokuti jednakih osnovnica i jednakih visina jednaki su.

*

Zadaci za vježbu: Obrazloži ove poučke:

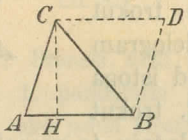
1. Ako se vrh trokuta pomiče pravcem, koji je s osnovnicom paralelno, to se ploština trokuta ne mijenja (lik 90.).

2. Od dva trokuta jednakih osnovnica (visina) a nejednakih visina (osnovnica) onaj je veći, koji ima veću visinu (osnovnicu) (lik 91.).

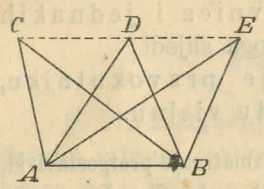
3. Paralelogram dijeli se dvokutnicama na četiri jednaka trokuta.

4. Ako se u paralelogramu potegne dvokutnica, te kroz jednu njezinu točku usporednice sa stranicama, to će se paralelogram raspasti na dva para sukladnih trokuta i na dva jednaka paralelograma.

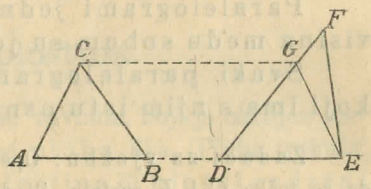
5. Od četiri trokuta, na koje se trapez dvokutnicama raspada, jesu ona dva jednaka, koja su na krakovima.



Lik 89.



Lik 90.

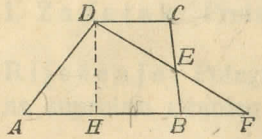


Lik 91.

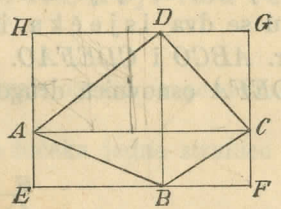
§. 80. **Trapez.** Ako se raspolovi stranica BC trapeza $ABCD$ (lik 92.), pa se kroz polovište E i točku D potegne pravac, koji će produženu stranicu AB u F presjeći, to ćemo dobiti sukladne trokute EBF i ECD. Prema tomu ako pridodamo jedan ili drugi od tih trokuta četverokutu $ABED$, dobit ćemo sad trapez $ABCD$, sad trokut AFD, kojemu je visina ujedno i visinom trapeza, a osnovnica trokuta jednaka je zbroju paralelnih stranica trapeza. $AF = AB + BF = AB + DC$.

Trapez jednak je trokutu, koji ima s njim istu visinu, a za osnovnicu ima zbroj paralelnih stranica trapeza.

Zadatak za vježbu: a) Dokaži sa likom 79., da je trapez jednak pravokutniku, koji ima s njim istu visinu, a za osnovnicu, ima srednjicu trapeza; b) načini modele od debela papira k likovima 79, 88 i 92.



Lik 92.



Lik 93.

§. 81. **Četverokut, u kojem su dvokutnice jedna na drugoj okomite.** Ako je $ABCD$ (lik 93.) zadani četverokut a $CA \perp DB$, to potegni vrhovima usporednice sa dvokutnicama. Tako ćeš opisati oko četverokuta pravokutnik $EFGH$, u kojem su stranice jednake pripadajućim diagonalama četverokuta $ABCD$. Trokut je $ACD = \frac{1}{2}\ ACGH$ i $\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ AEFC$, dakle je također $ABCD = \frac{1}{2}\ EFGH$; t. j.

Četverokut, u kojem su dvokutnice jedna na drugoj okomite, jednak je polovini pravokutnika, koji ima obje dvokutnice za stranice.

Zadaci za vježbu: 1. Za koje vrste četverokuta vrijedi prijašnja poučka?

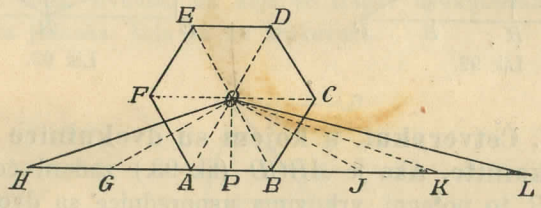
2. Kako glasi ova poučka napose za četvorinu?

3. Dokaži, da je svaki četverokut polovina paralelograma, u kojem su stranice jednake sa dvokutnicama četverokuta, te čine iste kute, kao dvokutnice.

§. 82. **Pravilni mnogokut i jedan njegov isječak.** a) Ako je O središte pravilnoga šesterokuta $ABCDEF$ (lik 94.), to je očevidno $ABCDEF = 6.\ ABO$. Ako sad na produženoj stranici AB prenesemo sve ostale stranice šesterokuta tako, da bude HL jednako njegovu opsegu, tada je $HGO = GAO = ABO = \ldots$, dakle $HLO = 6.\ ABO$. Iz toga slijedi $ABCDEF = HLO$.

Pravilni mnogokut jednak je trokutu, kojemu je opseg mnogokuta osnovnicom a visinom udaljenost jedne stranice mnogokuta od središta njegova.

b) Ako se spoje dva vrha pravilnoga mnogokuta i središte, dobiju se dva isječka ili sektora pravilnoga mnogokuta. N. pr. *ABCO* i *CDEFAO*. *ABC* se zove osnovnica prvoga a *CDEFA* osnovnica drugoga isječka.



Lik 94.

Svaki isječak pravilnoga mnogokuta jednak je trokutu, kojemu je osnovnicom osnovnica isječka, a visinom udaljenost jedne stranice isječka od središta mnogokuta.

§, 83. **Krug i kružni isječak.** Opseg i ploha pravilnoga mnogokuta razlikuje se od opsega odnosno plohe upisanoga kruga to manje, što mnogokut ima veću množinu stranica. Tu množinu stranica možemo uzeti uvijek tako veliku, da se ona razlika, pa bilo i kod veoma točnoga crtanja ili računanja, ne će više ni opaziti. S toga razloga obje predašnje poučke, koje vrijede ma za koji pravilni mnogokut i njegov isječak, vrijede također za krug i kružni isječak, na ime:

a) Ploha kruga jednaka je trokutu, kojemu je obodnica osnovnicom a polumjer visinom.

b) Kružni isječak jednak je trokutu, kojemu je luk osnovnicom a polumjer visinom.

Pretvaranje i dijeljenje likova.

§. 84. **Pretvaranje likova.** Zadani lik pretvoriti u drugi reći će načiniti novi lik, koji ima sa zadanim jednaku plohu.

1. Zadatak: Pretvori kosi paralelogram u pravokutnik.

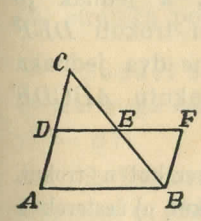
Rješenje: Potegni s krajnih točaka jedne stranice okomice na suprotnu stranicu (§. 78.).

2. Zadatak. Pretvori trokut u paralelogram iste osnovnice.

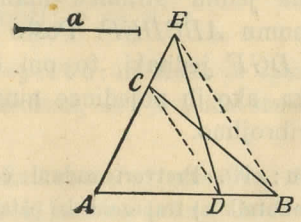
Rješenje: Raspolovi stranicu *BC* zadanoga trokuta *ABC* (lik 95.), potegni polovištem *E* pravac $DF \parallel AB$ i $BF \parallel AD$. *ABFD* je traženi paralelogram. (Za što?)

3. Zadatak. Pretvori zadani trokut u drugi tako, da ostane jedan kut nepromijenjen, a jedna od okriljujućih ga stranica da ima zadanu dužinu.

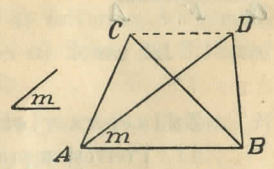
Rješenje. Neka je *ABC* (lik 96.) zadani trokut, *BAC* pridržani kut i $AD = a$ ona stranica, koja ima stranicu *AB*



Lik 95.



Lik 96.



Lik 97.

nadomjestiti. Potegni *CD*, za tim iz točke *B* usporednicu sa *CD*, te spoji točku *D* i sjecište *E* ove usporednice sa produženjem stranice *AC*. *ADE* je traženi trokut. Jest na ime $\triangle CDB = CDE$, dakle i $ACD + CDB = ACD + CDE$ ili $ABC = ADE$.

Zadaci za vježbu: 1. Pretvori a) paralelogram, b) trokut u drugi, koji će imati istu osnovnicu i jedan zadani priležeći kut osnovnice (lik 97.).

2. Pretvori trokut u drugi, koji će imati istu osnovnicu, te će biti a) istokračan, b) na osnovnici pravokutan, c) na vrhu pravokutan. Kada se može posljednji zadatak riješiti?

3. Pretvori pravokutnik u trokut iste osnovnice.

4. Pretvori trokut u paralelogram iste visine.

5. Pretvori paralelogram u trokut a) iste osnovnice, b) iste visine.

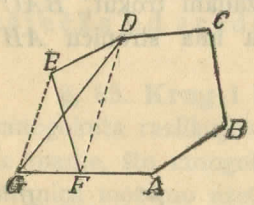
6. Pretvori trokut u drugi tako, da ostane jedan kut nepromijenjen, a jednu okriljujuću ga stranicu nadomjesti većom. Ako je u liku 96. ADE zadani trokut a AB zadana nova stranica, to potegni $DC \parallel BE$, pa spoji B i C. $ABC = ADE$.

7. Pretvori trapez a) u trokut (lik 92.), b) u pravokutnik (lik 79.), c) u kosi paralelogram jednake visine.

8. Pretvori deltoid u pravokutnik, u romb.

9. Pretvori pravokutnik, romb u deltoid, u kojem nejednake stranice čine pravi kut.

4. Zadatak. Zadani mnogokut pretvori u drugi, koji će imati jednu stranicu manje.



Lik 98.

Riješenje. Ako je $ABCDEF$ (lik 98.) zadani mnogokut, to potegni dvokutnicu DF, zatim $EG \parallel DF$ te spoji D i G. Tako se dobije traženi mnogokut $ABCDG$, koji ima jednu stranicu manje, a jednak je onomu $ABCDEF$. Pošto su trokuti DEF i DGF jednaki, to oni čine dva jednaka lika, ako ih pojedince mnogokutu $ABCDF$ pribrojimo.

Zadaci za vježbu: 10. Pretvori zadani četverokut u trokut. 11. Pretvori u pravokutnik a) trapezoid, b) peterokut, c) šesterokut.

§. 85. **Dijeljenje likova.** 1. Zadatak. Razdijeli trokut na n jednakih dijelova tako, da će djelišnice ishoditi iz jednoga vrha.

Riješenje. Jedna se samo stranica trokuta razdijeli na n jednakih dijelova, pa se djelišta i suprotni vrh spoje. N. pr. $n = 4$.

2. Zadatak. Razdijeli paralelogram na n dijelova tako, da budu djelišnice paralelne s jednom stranicom.

Riješenje. Razdijeli samo jednu stranicu na n jednakih dijelova, pa potegni dijelištima usporednice sa stranicama. N. pr. $n = 8$.

Zadaci za vježbu: 1. Razdijeli trokut (od oka ili kušajući šestarom) a) na tri, b) na pet jednakih dijelova tako, da djelišnice izlaze iz jednoga vrha.

2. Razdijeli paralelogram a) na dva, b) na šest jednakih dijelova tako, da djelišnice budu paralelne sa jednom stranicom.

3. Razdijeli paralelogram a) na dva, b) na četiri, c) na šest jednakih dijelova tako, da djelišnice ishode iz jednoga vrha.

4. Razdijeli paralelogram a) na tri, b) na pet jednakih dijelova tako, da djelišnice ishode iz jednoga vrha. Najprije ga razdijeli na šest, odnosno na deset jednakih dijelova.

5. Razdijeli trapez na n jednakih dijelova tako, da djelišnice sijeku paralelne stranice.

6. Razdijeli kakav god četverokut na n jednakih dijelova. Razdijeli najprije dvokutnicu na n jednakih dijelova, pa spoji djelišta sa vrhovima dvokutnici suprotnima.

Mjerenje dužine.

§. 86. **Opseg mnogokuta.** Opseg se mnogokuta nađe zbrajanjem svih njegovih stranica. Ako su sve stranice među sobom jednake, onda se nađe opseg (o), ako se jedna stranica (s) brojem (n) stranica pomnoži; $o = n \,.\, s$.

Zadaci za vježbu: 1. Kolik je opseg a) četvorine, b) romba, c) pravilnoga deseterokuta, ako je jedna stranica α) $2cm$. β) $3{\cdot}15cm$, γ) $= a$?

2. U pravokutniku ima α) osnovnica $2{\cdot}5m$, a visina $1{\cdot}5m$, β) osnovnica a, visina b jedinica dužine. Izračunaj opseg.

3. Kolika je visina pravokutnika, kojemu je α) opseg $18cm$. a osnovnica $6cm$, β) opseg o a osnovnica a?

§. 87. **Mjerenje kružnice.** Da se dužina kružnice opredijeli, istražuje se, koliko se puta promjer na kružnici sadržava, t. j. traži se omjer između obodnice i promjera. Ako se pomnoži promjer nađenim brojem, onda se je našla dužina kružnice. No

pošto se promjer kao pružac ne da na kružnici prenositi, to se traženi omjer mora drugim putem pronaći.

Mehanički se mjeri kružnica tako, da se načini kružnica od konca, pa se konac rastegne u pravac i taj se izmjeri ili promjerom ili drugim kojim pruščem za jedinicu uzetim. Da se može točnije postupati, omota se tanki konac po više puta oko valjka kružnoga proreza, iz dužine omotanoga konca i broja omotâ izračuna se dužina jednoga omota, pa se ova razdijeli dužinom valjkova promjera. (Izvedi takav pokus za vježbu). I taj postupak je od ograničene točnosti, te nije u mjerstvu ni od kakve vrijednosti.

Geometrički se mjeri kružnica tako, da se ona uspoređuje s opsezima u nju upisanih i oko nje opisanih mnogokuta,

Ako se u kružnicu upiše pravilan šesterokut, to je svaka njegova stranica manja od pripadajućega joj luka, cijeli njegov opseg je dakle manji od opsega kruga. Obodnica je dakle veća od trostrukoga promjera; $o > 3d$.

Ako se oko kruga opiše četvorina, to je opseg četvorine veći od opsega kruga. Obodnica je dakle manja od četverostrukoga promjera; $o < 4d$.

Što više stranica ima upisani i opisani mnogokut, to manje se njihovi opsezi razlikuju, to bliže su dakle vrijednosti, među kojima se nalazi obodnica. Ako iznosi n. pr. broj stranica 3072, to se nađe računom, da je $o > 3{\cdot}141591.d$, a $o < 3{\cdot}141593.d$. Prvi dakle koeficijenat od d manji je, a drugi je veći od onoga broja, s kojim d pomnožen daje točno obodnicu. S toga je taj broj 3·14159 . ., ako se pridrži samo pet desetinaka, te je onda $o = 3{\cdot}14159\ldots \times d$.

Broj 3·14159 . ., koji predstavlja omjer između obodnice i promjera, zove se Ludolfov broj (po Ludolphu van Ceulenu, koji ga je oko godine 1600. na 35 desetinaka proračunao), pa se radi kratkoće općenito bilježi sa π. U mnogim slučajevima dovoljna je za π približna vrijednost $3\frac{1}{7} = 3{\cdot}14\ldots$ (Archimedov omjer), a u točnijim se računima mora nužni broj desetinaka uzeti iz jednadžbe $\pi = 3{\cdot}1415926536\ldots$ Ludolfov broj ne može se, kao što ni

$\sqrt{2}$ točno izraziti niti običnim niti konačnim desetinskim česnikom.

Ako znače o_1 i d obodnice, d i d_1 promjere, r i r_1 polumjere dvaju krugova, to je:

$$o = d \cdot \pi;\quad o = 2r \cdot \pi;\quad d = \frac{o}{\pi};\quad r = \frac{o}{2\pi};$$

$$o : o_1 = d : d_1 = r : r_1.$$

a) Obodnica jednaka je produktu od promjera ili dvostrukoga polumjera i Ludolfovog broja.

b) Promjer jednak je cijeloj obodnici a polumjer polovini (obodnice) razdijeljenoj Ludolfovim brojem.

c) Obodnice dvaju krugova odnose se kao njihovi promjeri ili kao njihovi polumjeri.

Opaske. 1. U prednjim poučkama mogu se pod „obodnicom, promjerom i polumjerom“ razumijevati ili spomenute crte ili također njihovi mjerni brojevi.

2. Kod računanja obodnice iz promjera, kod računanja polumjera iz obodnice itd. neka se redovito obave množidbe i djelidbe Ludolfovim brojem skraćeno. Potrebiti broj desetinaka izlazi iz naravi zadatka ili također iz razloga, da sve brojke iznoska, osim možda posljednje, imaju biti pouzdane. Ako nađemo n. pr., da je promjer kruga jednak $42mm$, pa ako se nijesmo kod mjerenja obazreli na česnike milimetra, tad se ne može ni obodnica česnicima mm izraziti. Jer ako se je promjer možda za $\frac{1}{3}$ mm premalen dobio, to ćemo dobiti obodnicu nešto preko 1 mm premalenu. U takvim slučajevima mora se iznosak pronaći mogućom točnosti.

Zadaci za vježbu: Izračunaj iz jedne od olina r, d, o, (polumjer, promjer, obodnica) ostale. N. pr.

$r = 1{\cdot}334m$; $d = 122m$; $o = 42{\cdot}33m$; $o = 478{\cdot}192km$.

2. Koliko km ima promjer zemaljskog meridijana (podnevnika), ako se on smatra kružnicom od $40.000km$?

3. Da se nađe promjer stabla s kružnim prorezom, izmjeri se opseg stabla. N. pr. $o = 4{\cdot}32m$.

4. Kolik je promjer kružnice, koja je četiri puta veća od kružnice s promjerom $12cm$?

5. Koliko okreta načini kolo $64cm$ promjera na putu $1km$ dugom?

6. Koliki put načini šiljak minutne kazaljke na uri, koji je dug $20mm$, u jednoj godini?

7. Stolar ima načiniti okrugao stol za 12 osoba, za svaku je razmak od $0{\cdot}6m$. Koliki će uzeti polumjer stola?

§. 88. **Mjerenje luka.** a) Zadatak. Izračunaj dužinu luka od jednoga stupnja, jedne minute i jedne sekunde.

Luk od jednoga stupnja je 360. dio obodnice. Iz toga slijedi:

$$\text{luk od 1 stupnja} = \frac{o}{360} = \frac{d\pi}{360} = \frac{r\pi}{180};$$

$$\text{luk od 1 minute} = \frac{o}{21600} = \frac{d\pi}{21600} = \frac{r\pi}{10800};$$

$$\text{luk od 1 sekunde} = \frac{o}{1296000} = \frac{d\pi}{1296000} = \frac{r\pi}{6480000}.$$

b) Jednakim središnjim kutima u istom krugu pripadaju jednaki lukovi. S toga pripada 2, 3, ... n puta većemu središnjemu kutu 2, 3, ... n puta veći luk. Iz toga slijedi:

Lukovi istoga kruga odnose se kao njima pripadajući središnji kuti.

$$b : b_1 = \alpha : \alpha_1.$$

c) Zadatak. Izračunaj iz polumjera r i središnjega kuta α (stupnjevna mjera za luk) dužinu b luka.

Ako se luk isporedi s polukružnicom, to se po prijašnjoj poučci dobije:

$$b : r\pi = \alpha : 180^0 \text{ a iz toga } b = \frac{r\alpha\pi}{180}.$$

Kakovim jedinicama mora se kut α u tom obličku izraziti?

d) Zadatak. Iz dužine b luka i polumjera r izračunaj središnji kut α.

Iz posljednjega razmjera nađe se: $\alpha = \frac{180\,b}{r\,\pi}$.

e) Zadatak. Iz dužine b luka i središnjega kuta α izračunaj polumjer r.

Iz razmjera je $r\pi = \frac{180\,b}{\alpha}$ i $r = \frac{180\,b}{\alpha\pi}$.

Kako se vidi, možemo pomoću razmjera $b : r\pi = \alpha : 180$ od olina b, α, r iz dvije izračunati treću.

Zadaci za vježbu: 1. Jedan stupanj ekvatora (polutnika) ima 15 zemljopisnih milja. Kolik je promjer ekvatorov?

2. Izračunaj dužinu luka a) jednoga stupnja, b) jedne minute, c) jedne sekunde u krugu, kojemu je polumjer $1m$ (na 7 desetinaka).

3. Ako smatraš ekliptiku (putanju) zemlje kružnicom, kojoj je polumjer $148{\cdot}6$ milijuna km, a vrijeme jedne ophodnje zemlje oko sunca uzmeš sa $365{\cdot}25$ dana, to izračunaj put, što ga zemlja jednoliko gibljući se provali a) za jedan dan, b) za jedan sat, c) za jednu minutu, d) za jednu sekundu. Upotrebi gore odabranu jedinicu, te izvedi sve račune mogućom točnosti. Iznosci ne će biti sasvim točni, jer upotrebljeni pretpostavci vrijede samo od prilike.

4. Ako je opseg kruga $32m$, neka se izračuna dužina luka a) 45^0, b) 122^0, c) $41^0\ 13'\ 24''$. ($b : o = \alpha : 360^0$).

5. Kolik je polumjer onoga kruga, u kojem središnjem kutu $\alpha = 36^0\ 42'$ pripada luku $1{\cdot}421m$?

6. Izračunaj luku $b = 44cm$ pripadajući središnji kut, ako je polumjer kruga $12cm$.

7. Izrazi stupnjevima onaj luk, koji je jednak polumjeru.

8. Na kolo vodenice u promjeru od $5{\cdot}5m$ pričvrsti se 35 lopata u jednakim razmacima. Kako daleko je jedna od druge?

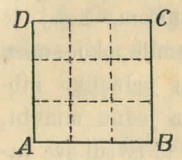
9. Kako dugu šinju trebaš za kolo, kojemu je promjer $2m$.

Mjerenje plohâ.

§. 89. **Razjašnjenja.** Kao plošna jedinica uzima se četvorina, kojoj je stranica jednaka jedinici dužine. Ako se uzme kao jedinica dužine $1m$, $1dm$, $1cm$ . . ., onda se ploha odnosne četvorine zove četvorni metar, četvorni decimetar, četvorni centimetar . . .

Zadanu plohu mjeriti reći će ispitivati, koliko se puta za jedinicu uzeta ploha u onoj sadržava. Broj, koji to pokazuje, zove se mjerni broj zadane plohe. Ako moramo n. pr. 3 četvorna metra i $\frac{1}{4}$ četvornoga metra zbrojiti, da dobijemo lik, koji ima s nekim trokutom jednaku plohu, to je $3{\cdot}25$ mjerni broj trokuta s obzirom na četvorni metar, ili jednostavnije rečeno: Ploština trokuta iznosi $3{\cdot}25$ četvornoga metra.

§. 90. **Četvorina.** Ako podijelimo stranice četvorine $ABCD$ (lik 99.) na tri jednaka dijela, pa suprotna dijelišta spojimo pruščima, to će se četvorina raspasti na $3 \times 3 = 9$ sukladnih četvorina. Ako se općenito stranica četvorine podijeli na a jednakih dijelova, to će se četvorina raspasti na $a \,.\, a = a^2$ sukladnih četvorina.



Lik 99.

Ako se jedinica dužine može a puta na jednoj stranici četvorine prenijeti, ako je dakle a mjerni broj stranice, to se zadana četvorina sastoji od $a \,.\, a = a^2$ četvorina, od kojih je svaka jednaka plošnoj jedinici. Dakle je a^2 mjerni broj za ploštinu četvorine. Mjerni broj za ploštinu četvorine nađe se, ako se mjerni broj jedne stranice sam sobom pomnoži; ili kraće; Ploština četvorine nađe se, ako se jedna stranica potencira (umnoža) na drugu potenciju.

$$p = a^2;\ a = \sqrt{p}$$

Opaske: 1. Izraz u računici „broj na četvorinu uzmnožati“ polazi otale, što se množenjem broja njim samim izračunava ploština četvorine, u kojoj je onaj broj mjernim brojem za jednu stranicu.

2. Iz oblička $p = a^2$ tumačimo označivanja: 1 četvorni metar $= 1m^2$, 1 četvorni decimetar $= 1dm^2$, 1 četvorni centimetar $= 1cm^2$ itd.

3. $1cm^2 = 100mm^2$; $1dm^2 = 100cm^2 = 10.000mm^2$; $1m^2 = 100dm^2 = 10.000cm^2 = 1{,}000.000mm^2$ itd. (Za što?) — Kod mjerenja ovećih ploha n. pr. zemljišta zove se $100m^2$ *ar* a $100ara$ *hektar*, te se piše $1a = 100m^2$; $1ha = 100a$.

4. Ako je stranica četvorine $= 4{\cdot}23m = 423cm$. to je ploština $p = (423 \times 423)cm^2 = 178929cm^2 = 17{\cdot}8929m^2$. Do istog iznoska bi došli i ovim računom: $p = (4{\cdot}23 \times 4{\cdot}23)\ m^2 = 17{\cdot}8929m^2$. Ploština se dakle četvorine dobije neposrednom upotrebom oblička $p = a^2$, ako i nije a cio broj.

Zadaci za vježbu: 1. a) Izračunaj ploštinu četvorine, u kojoj je stranica $10{\cdot}24m$. Ako se smatra $10{\cdot}24$ nepotpunim česnikom, tad izračunaj $10.24 \times 10{\cdot}24$ skraćenom množidbom mogućom točnosti.

b) Tako isto: $7{\cdot}24dm$, $72{\cdot}409m$.

2. a) Ploština četvorine je $16{\cdot}6284m^2$; kolika je stranica? Ako se smatra $16{\cdot}6284$ nepotpunim česnikom, pa ako se zahtijeva rezultat što

više točan, tada izračunaj tri prve znamenke drugoga korijena na obični način, a druge dvije djelidbom.

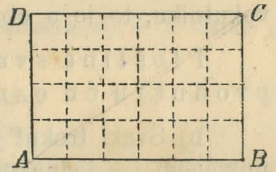
b) Tako isto: $441cm^2$, $135424dm^2$, $1406{\cdot}25m^2$.

3. Iz opsega o četvorine izračunaj ploštinu p i obratno iz ploštine opseg N. pr. $o = 32cm$; $p = 10dm^2$.

Tako isto: $o = 100m$, $48{\cdot}8dm$, $105{\cdot}6m$; $p = 169cm^2$, $11{\cdot}56m^2$, $620{\cdot}01m^2$.

4. Okvir slike, koja ima oblik četvorine sa stranicom $a = 62cm$. širok je $12cm$. Izračunaj ploštinu i izvanji opseg okvira.

§. 91. **Pravokutnik.** Ako ima osnovnica pravokutnika $ABCD$ (lik 100.) $6cm$ a visina $4cm$, to se on može razdijeliti na četiri pruge po šest četvorina, od kojih je svaka $1cm^2$. Ploština pravokutnika iznosi dakle $(6 \times 4)cm^2 = 24cm^2$. Ako se može u opće neka stanovita jedinica prenijeti na osnovnici g puta, a na visini v puta, t. j. ako su g i v mjerni brojevi osnovnice i visine, to se pravokutnik raspada na v pruga po g četvorina, dakle u svemu na $g \,.\, v$ plošnih jedinica. Iz toga slijedi:



Lik 100.

Ploština pravokutnika jednaka je produktu od osnovnice i visine; $p = g \,.\, v$.

Uvjeri se, da je taj obličak i onda valjan, kad nijesu g i v cijeli brojevi.

Zadaci za vježbu: 1. Opredijeli ploštinu školske ploče, jednoga okna na prozoru, jednoga arka papira itd., izmjeriv stranice.

2. Koliko četvornih kamenih ploča sa $22cm$ dugom stranicom treba, da se pravokutna ploha $25{\cdot}3m$ duga, a $9{\cdot}9m$ široka pokrije?

3. Gradilište, u obliku pravokutnika, dugo $52{\cdot}2m$, široko $36{\cdot}4m$ stoji 14250·6 kr. Po što je $1m^2$?

4. Za voćnjak iskolčiš pravokutnik $108m$ širok a $205m$ dug. Koliko voćaka trebaš za voćnjak, ako na svaku voćku računaš $20m^2$ površine?

5. Koliko dasaka trebaš za pod sobe $16m$ duge a $7{\cdot}68m$ široke, ako je svaka daska $6{\cdot}4m$ duga a $0{\cdot}4m$ široka?

6. U pravokutnom vrtu, dugom $70m$ a širokom $45{\cdot}5m$, načinjen je duž opsega put $1m$ širok. Osim toga su sredine duljih stranica spojene putom $0{\cdot}6m$ širokom. Koliko ara iznosi obrađen dio vrta?

7. Kako se izračuna visina pravokutnika iz njegove ploštine p i osnovnice g? N. pr. $p = 12a$, $g = 1km$; $p = 75ha$, $g = 250m$.

8. Iz ploštine p i visine v pravokutnika izračunaj osnovnicu g. N. pr. $p = 33dm^2$, $v = 2m$; $p = 172{\cdot}38$, $v = 97{\cdot}5$; $p = 2{\cdot}154m$, $v = 1{\cdot}08m$.

§. 92. **Kosi paralelogram i trokut.** a) Svaki se kosi paralelogram može pretvoriti u pravokutnik s jednakom osnovnicom i s jednakom visinom (§. 78.). Ako su dakle g i v mjerni brojevi osnovnica i visina u paralelogramu i jednakom mu pravokutniku, to je u oba slučaja mjerni broj ploštine $p = g \cdot v$.

Ploština svakog paralelograma jednaka je produktu od osnovnice i visine.

b) Svaki trokut je polovina paralelograma s jednakom osnovnicom i s jednakom visinom (§. 79.). Iz toga slijedi:

Ploština trokuta jednaka je poluproduktu od osnovnice i visine.

$$p = \frac{g \cdot v}{2}, \quad p = \frac{g}{2} \cdot v, \quad p = g \cdot \frac{v}{2}.$$

Izrazi i posljednja dva oblička riječima.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj ploštinu a) paralelograma, b) trokuta, ako je zadana osnovnica g i visina v. N. pr.
$g = 524cm$, $v = 16dm$; $g = \frac{2}{3}m$, $v = \frac{4}{5}m$; $g = 6{\cdot}954m$, $v = 5{\cdot}3m$; $g = 96{\cdot}52m$, $v = 75{\cdot}15m$; $g = 28{\cdot}5m$, $v = 21{\cdot}48m$.

2. Izračunaj osnovnicu g paralelograma iz ploštine p i visine v. N. pr. $p = 9424cm^2$, $v = 1{\cdot}52m$; p = $172{\cdot}58a$, $v = 97{\cdot}5m$.

3. Kolika je visina paralelograma ploštine p i osnovnice g? N. pr. $p = 0{\cdot}7a$, $g = 14m$; $p = 75ha$, $g = 250m$; $p = 6{\cdot}7996ha$, $g = 890m$, p = $7{\cdot}1838ha$, $g = 153{\cdot}5m$.

4. Izračunaj ploštinu pravokutnoga trokuta iz kateta a i b. N. pr. $a = 12cm$, $b = 1dm$; $a = 17{\cdot}25m$, $b = 21{\cdot}36m$; $a = 127{\cdot}52m$, $b = 96{\cdot}84m$.

§. 93. **Trapez.** a) Pomoću §. 80. dobit ćemo ovu poučku:

Ploština trapeza jednaka je poluproduktu od zbroja paralelnih stranica i visine.

Ako označimo sa a i b paralelne stranice a sa v visinu, to je:

$$p = \frac{(a+b) \cdot v}{2}, \quad p = \frac{a+b}{2} \cdot v, \quad p = (a+b) \cdot \frac{v}{2}.$$

b) Pošto je poluzbroj paralelnih stranica u trapezu jednak srednjici m (§. 71.), to se može također reći:

Ploština trapeza jednaka je produktu od srednjice i visine. (§. 81., vježba).

$$p = m \cdot v.$$

Zadaci za vježbu: 1. Iz paralelnih stranica a, b i visine v trapeza izračunaj ploštinu p. N. pr.

$a = 12cm$, $b = 8cm$, $v = 10cm$.,
$a = 6{\cdot}2m$, $b = 4{\cdot}5m$, $v = 2{\cdot}2m$.
$a = 26m$, $b = 16m$, $v = 15m$.
$a = 9{\cdot}2cm$, $b = 8{\cdot}6cm$, $v = 7{\cdot}42cm$.

2. Iz paralelnih stranica a, b i ploštine p trapeza izračunaj visinu v. N. pr.

$a = 30m$, $b = 14m$, $p = 110m^2$.
$a = 40m$, $b = 20m$, $p = 360m^2$.
$a = 28dm$, $b = 12dm$, $p = 120m^2$.
$a = 6\,247m$, $b = 3\,948m$, $p = 27{\cdot}5265cm^2$.

3. Iz visine v i ploštine p trapeza izračunaj srednjicu m. N. pr. $v = 8cm$, $p = 0{\cdot}76dm^2$, $v = 12dm$, $p = 14400dm^2$.

4. Obje paralelne stranice su u istokračnom trapezu poznate ($a = 8cm$, $b = 6cm$) i jedan kut ($\alpha = 45^0$) je poznat. Izračunaj ploštinu trapeza.

5. Odredi ploštinu trapeza u likovima 76. i 78. pomoću mjerila.

§. 94. **Četverokut, u kojem su dvokutnice među sobom okomite.** Ploština četverokuta, u kojem su dvokutnice jedna na drugoj okomite, jednaka je poluproduktu obiju dvokutnica (§. 81.).

$$p = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Zadaci za vježbu: 1. Iz dvokutnice d četvorine izračunaj njezinu ploštinu p. N. pr. $d = 5cm$.

2. Iz ploštine p četvorine izračunaj njezinu dvokutnicu d. N. pr. $p = 1m^2$.

3. Iz obje dvokutnice d_1 i d_2 romba izračunaj njegovu ploštinu. N. pr. $d_1 = 16cm$, $d_2 = 24\ cm$.

4. Ako je ploština deltoida $42cm^2$, a jedna dvokutnica $7cm$, kolika je druga dvokutnica?

§. 95. **Pravilni mnogokut i njegov isječak.** a) Ploština pravilnoga mnogokuta jednaka je poluproduktu od njegova opsega i udaljenosti jedne stranice od središta (§. 82., a).

$$p = \frac{o \cdot r}{2}.$$

b) Ploština isječka pravilnoga mnogokuta jednaka je poluproduktu od osnovnice isječka i udaljenosti jedne stranice od središta (§ 82. b).

$$p = \frac{g \cdot r}{2}.$$

Zadaci za vježbu. 1. Stranica pravilna šesterokuta ima 6 cm, visina jednoga trokuta $5{\cdot}2cm$., kolika je ploština?

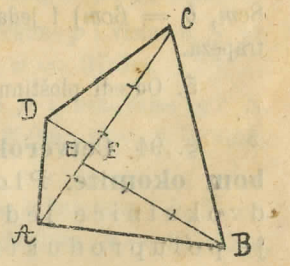
2. Izračunaj ploštinu pravilna osmerokuta, ako je stranica $2m$, a udaljenost jedne stranice od središta $1{\cdot}75m$.

3. Dvanaesterokut ima opseg $12{\cdot}48m$, daljina dviju paralelnih stranica iznosi $3{\cdot}86m$, izračunaj ploštinu.

4. Stranica pravilne osmerokutne dvorane iznosi $3{\cdot}84m$., a visina svakog trokuta $4{\cdot}6m$. koliko stoji pod, ako se za m^2, plaća 6 kr. 45 fil.?

§. 96. **Nepravilni mnogokut.** Da se ploština nepravilnoga mnogokuta izračuna, razdijeli se on na same trokute i četverokute, pa se opredijeli ploština svakoga od tih likova. Zbroj dobivenih mjernih brojeva je mjerni broj za ploštinu mnogokuta.

Ploštinu tropezoida $ABCD$ (lik 101.) izračunat ćeš n. pr. ovako. Potegni dvokutnicu $AC = 4$, visine $BE \parallel 3$, $DF = 1$.



Lik 101.

$\triangle ABC = \frac{4 \times 3}{2} = 6$, $\triangle ADC =$

$\frac{4. \times 1}{2} = 2$, dakle $ABCD = 8$, i to $8cm^2$, ako je $DF = 1cm$.

Zadaci za vježbu. 1. Izračunaj ploštinu peterokuta $ABCDE$, kad si dužinu stranica BC, DC, DE i njihove daljine od točke A izmjerio.

2. Nađi ploštinu likova 83, 95, 97.

§. 97. **Krug.** a) Ploština kruga jednaka je poluproduktu od obodnice i polumjera (§. 83., a).

$$p = \frac{o \cdot r}{2}.$$

b) Pošto je $o = 2r\pi$, to slijedi $p = \frac{2\ r\ \pi\ .\ r}{2} = r^2\pi$.

Ploština kruga jednaka je produktu od četvorine polumjera i Ludolfovoga broja.

c) Ako znači d promjer kruga, to je

$$r = \frac{d}{2},\ r^2 = \frac{d^2}{4} \text{ i } p = \frac{d^2\pi}{4}.$$ (Riječima?).

d) Za drugi neki krug postoje obličči:

$$p_1 = r_1^2\pi = \frac{d_1^2\pi}{4}.$$ Iz toga slijedi:

$$p : p_1 = r^2\pi : r_1^2\pi = r^2 : r_1^2,$$

$$p : p_1 = \frac{d^2\pi}{4} : \frac{d_1^2\pi}{4} = d^2 : d_1^2.$$

Ploštine dvaju krugova odnose se kao četvorine njihovih polumjera ili kao četvorine njihovih promjera.

e) Iz $r^2\pi = p$ slijedi $r^2 = \frac{p}{\pi}$ i $r = \sqrt{\frac{p}{\pi}}$. (Riječima?).

Zadaci za vježbu: 1. Kolika je ploština kruga, kojemu je polumjer $12cm$? Množidbu sa π obavi skraćeno na dvije desetinke. Tako isto $r = 2{\cdot}5m.$, $r = 18{\cdot}7\ cm$.

2. Mjerenjem se nađe, da je polumjer $5{\cdot}623m$ dug; izračunaj ploštinu kruga. Pošto česnik $5{\cdot}423$ imaš smatrati nepotpunim to množidbu $5{\cdot}623 \times 5{\cdot}623 \times \pi$ obavi mogućom točnosti.

3. Iz obodnice kruga izračunaj njegovu ploštinu, najprije za $o = 60{\cdot}378m$ a onda općenito. Tako isto $o = 31{\cdot}4\ dm.$, $o = 2{\cdot}1\ cm$.

*

4. Kolika je obodnica kruga, kojemu je ploština a) $= 1m^2$, b) $= p$?

5. Koza privezana na $3{\cdot}5m$ dugo uže popasla je svu travu na okolo. Koliku je ploštinu popasla?

6. Iz polumjera kruga ($r = 1$) izračunaj stranicu četvorine, koja ima s krugom jednaku ploštinu. Tako isto: $r = 3{\cdot}4m, r = 18{\cdot}3dm, 0{\cdot}256m$.

§. 98. **Kružni vijenac.** Nađe se ovo:

$$p = r^2\pi - r_1{}^2\pi = (r^2 - r_1{}^2)\pi,$$

ili također $p = (r + r).(r - r_1)\pi$. (Riječima?).

Zadaci za vježbu: 1. Kolika je ploha između dvije koncentrične kružnice s polumjerima $r = 57m$ i $r_1 = 32m$?; $r = 3{\cdot}52$ cm, $r_1 = 1{\cdot}23$ cm.

2. Iz ploštine nutarnjega kruga ($p_1 = 42{\cdot}18cm^2$) i širine vijenca ($b = 4cm$) izračunaj ploštinu vijenca.

3. Iz obodnice izvanjega kruga ($o = 162{\cdot}7834m$) i širine vijenca ($b = 2{\cdot}56m$) izračunaj ploštinu vijenca.

4. Obodnice dvaju koncentričnih krugova iznose $16{\cdot}58$ i $12{\cdot}36$ cm, kolik je vijenac?

5. Kružni vijenac ima sa nekim krugom jednaku ploštinu, kolik je polumjer kruga? N. pr. $r = 1dm$, $r_1 = 6cm$; $r = 0{\cdot}8$ cm; $r_1 = 0{\cdot}3cm$; $r = 3{\cdot}5dm$, $r_1 = 0{\cdot}9dm$.

§. 99. **Kružni isječak.** a) Ploština kružnog isječka jednaka je poluproduktu od dužine luka (b) i polumjera (r). (§. 83., b)

$$p = \frac{b \cdot r}{2}.$$

b) Jednakim lukovima u istom krugu pripadaju jednaki isječci. S toga odgovara 2, 3, ... n puta većemu luku 2, 3, ... n puta veći isječak. Iz to toga slijedi:

Isječci istoga kruga odnose se među sobom kao pripadajući lukovi.

$$p : p_1 = b : b_1.$$

c) Jednakim središnjim kutovima u istom krugu pripadaju jednaki isječci. S toga 2, 3, ... n puta većemu središnjemu kutu pripada 2, 3, ... n puta veći isječak. Iz toga sljedi:

Isječci istoga kruga odnose se među sobom kao pripadajući središnji kuti.

$$p : p_1 = \alpha : \alpha_1.$$

d) Pošto se kružna ploha može smatrati isječkom, koji pripada središnjemu kutu 360°, to slijedi iz posljednje poučke ovo:

$$p : r^2\pi = \alpha : 360^0.$$

Iz toga se razmjera može svaka od tri oline p, r, α izračunati, ako su dvije poznate. Kako glase odnosna tri zadatka i njihove rješidbe?

Zadaci za vježbu; 1. Iz polumjera $r = 2m$ i središnjega kuta $\alpha = 63^0$ izračunaj pripapajući luk i pripadajući isječak. Tako isto $r = 0{\cdot}71dm$, $\alpha = 36^0$, $r = 5{\cdot}5$ cm, $\alpha = 44^0$.

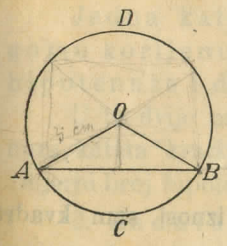
2. Iz polumjera $r = 2dm$, i luka $b = 4cm$ izračunaj pripadajući središnji kut i pripadajući isječak. Tako isto $r = 7{\cdot}4cm$, $b = 3cm$; $r = 0{\cdot}944m$; $b = 1{\cdot}237m$.

3. Iz središnjega kuta $\alpha = 45^0$ i luka $b = 1dm$ izračunaj polumjer i isječak. Tako isto $\alpha = 60^0$, $b = 2dm$; $\alpha = 54^0\ 30'$, $b = 0{\cdot}23cm$.

4. Iz središnjega kuta $\alpha = 40^0$ i isječka $p = 25dm^2$ izračunaj polumjer i luk.

Opaska. U posljednja četiri zadatka upotrebi od obličaka: $p = \frac{b \cdot r}{2}$, $p : r^2\pi = \alpha : 360$, $b : r\pi = \alpha : 180$ najprije onaj, koji od olina r, α, b, p dvije sadržava, a onda istom jedan od ostala dva oblička.

5. Kolik polumjer mora imati krug, ako on ima biti jednak isječku, kojemu pripada polumjer $r = 5dm$ i središnji kut $\alpha = 42^0$? — Ukloni se računanju sa π.



Lik 102.

§. 100. **Kružni odsječak.** Ploština kružnog odsječka jednaka je zbroju ili razlici pripadajućega isječka i nekoga trokuta, prema tomu, kako je on kad veći ili manji od polukruga.

Iz lika se 102. dobiva:

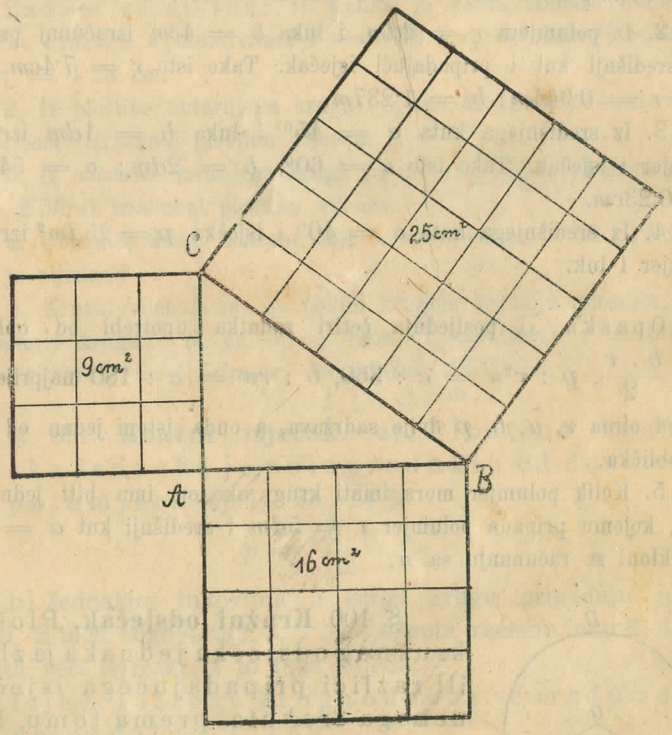
Odsječak ACB = isječku $AOCB$ — trokutu AOB.

Odsječak ADB = isječku $AOBD$ + trokutu AOB.

Zadatak za vježbu: Kolik je jedan od odsječaka, koji su omeđeni obodnicom polumjera $r = 5cm$ i stranicom upisane četvorine? (§. 94., vježba 1.).

Pitagorina poučka sa upotrebama.

§. 101. **Pitagorina poučka.** Načiniš li pravokutni trokut sa katetama $3cm.$ i $4cm.$, to će hipotenuza iznositi upravo $5cm.$ Ako nad svakom stranicom nacrtaš kvadrat, to će kvadrati nad



Lik 103.

katetama iznositi zajedno $25cm^2$ a toliko iznosi sam kvadrat nad hipotenuzom. Iz toga slijedi poučka:

Kvadrat hipotenuze jednak je zbroju kvadrata obiju kateta.

Ovu poučku pripisuju filozofu Pitagori, koji se je rodio na otoku Samu oko god. 580 pr. Is. te ju po njemu prozvaše.

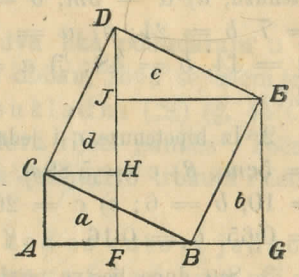
Iz prve poučke slijedi ova druga:

Kvadrat jedne katete jednak je kvadratu hipotenuze manje kvadratu druge katete.

Opaska: Pitagorina poučka može se i općenito ovako dokazati:

ABC je zadani trokut, $BCDE$ četvorina hipotenuze. $DF \parallel AC$, $EG \parallel AC$, $CH \parallel AG$, $EJ \parallel AG$. $AFHC$ je onda četvorina katete AC a $FGEJ$ četvorina katete AB.

Trokuti a, b, c, d jesu sukladni, pa ako od peterokuta $AGEDC$ uduzmeš najprije a i b. a onda c i d, ostat će ti jednake plohe: prvi put na ime četvorina $CBED$ a drugi put četvorine $AFHC$ i $FGEJ$.



Lik 104.

§. 102. **Upotrebe pitagorine poučke:** 1. Zadatak. Izračunaj jednu stranicu pravokutnoga trokuta, ako su dvije poznate.

Ako označimo sa a, b c mjerne brojeve obiju kateta i hipotenuze, to je po Pitagorinoj poučci:

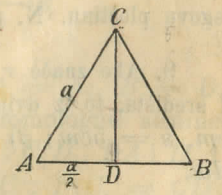
$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ a iz toga}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{c^2 - b^2},\ b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Hipotenuza jednaka je drugomu korijenu iz zbroja četvorina obiju kateta.

Jedna kateta jednaka je drugomu korijenu iz razlike četvorina hipotenuze i druge katete.

U te dvije poučke stoje izrazi: „hiponuza, kateta“ kratkoće radi mjesto opširnijih: „mjerni broj hipotenuze, mjerni broj katete“.



Lik 105.

2. Zadatak: Iz jedne stranice a istostraničnoga trokuta izračunaj visinu v i ploštinu p.

Iz pravokutnoga trokuta ACD (lik 105.) nađe se po Pitagorinoj pouči:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Dakle je

$$p = \frac{a}{2} \cdot v = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$

Zadaci za vježbu: 1. Zadane su obje katete a i b, nađi hipotenuzu, α) $a = 3m$, $b = 4m$; β) $a = 12dm$, $b = 5dm$; γ) $a = 7$, $b = 24$; δ) $a = 9$, $b = 40$; ε) $a = 11$, $b = 60$, i) $a = 14$, $b = 48$; ζ) $a = 16$, $b = 63$; i) $a = 0{\cdot}13$, $b = 0{\cdot}84$.

2. Iz hipotenuze c i jedne katete izračunaj drugu. α) $c = 13dm$, $a = 5cm$; β) $c = 5{\cdot}89m$, $b = 3{\cdot}12m$; γ) $c = 17$, $b = 8$; δ) $c = 10$, $b = 6$; ε) $c = 26$, $a = 10$; ζ) $c = 37$, $b = 12$; i) $c = 0{\cdot}65$, $b = 0{\cdot}16$.

3. $8m$ duge ljestve prislone se na zid, te su na zemlji od zida $3{\cdot}6m$ udaljene. Do koje visine dosežu ljestve?

4. Iz stranice a četvorine izračunaj dvokutnicu d.

$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. N. pr. $a = 4{\cdot}3m$.

5. Kolika je stranica one četvorine, koja je upisana u krug polumjera r? N. pr. $= 1dm$. $(a = r\sqrt{2})$

6. Iz stranice a i b pravokutnika izračunaj α) dvokutnicu, β) polumjer opisane kružnice. N. pr. $a = 4dm$, $b = 9cm$.

7. Izračunaj visinu i ploštinu istokračnoga trokuta, kojemu je osnovnica $g = 2{\cdot}66m$, i jedan krak $s = 2{\cdot}05m$.

8. Iz stranice a istostraničnoga trokuta izračunaj njegovu visinu i njegovu ploštinu. N. pr. $a = 12cm$. $\left(v = \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$.

9. Ako znače r s i c polumjer kruga, tetivu i njezinu daljinu od središta, to iz dvije tih olina izračunaj treću. N. pr. α) $r = 5cm$, $s = 5cm$; β) $r = 3{\cdot}24m$, $c = 2{\cdot}18m$; γ) $s = 3dm$, $c = 3dm$.

10. Izračunaj opseg i ploštinu pravokutnoga trokuta, u kojem je hipotenuza $8cm$ i jedan kut 30^0.

11. Iz paralelnih stranica a i b istokračnoga trapeza i jednoga kraka c izračunaj ploštinu trapeza. N. pr. $a = 1{\cdot}8dm$, $b = 1{\cdot}2dm$, $c = 5cm$.

12. Iz dvokutnica d_1 i d_2 romba izračunaj njegov opseg. N. pr. $d_1 = 1{\cdot}6m$, $d_2 = 1m$.

13. Kolika je ploština pravilnoga šesterokuta, koji je upisan u krug polumjera r? $\left(v = \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)$.

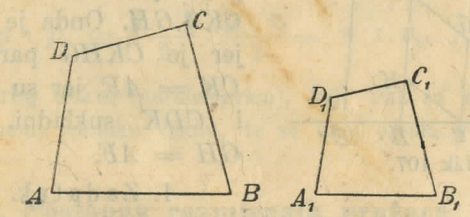
Sličnost.

§. 103. **Razjašnjenja.** Ako se dva lika podudaraju u veličini, zovu se jednaki (=), ako u obliku, zovu se slični ($\sim$), ako pak u veličini i obliku, zovu se sukladni ($\cong$) (§. 44.).

Znak $\sim$ potječe od početnoga slova riječi „similis“. Točnije razjašnjenje sličnosti dvaju mnogokuta (uključivo trokuta i četverokuta) ovo je:

Dva su mnogokuta slična, kad su kutovi jednoga jednaki po redu kutovima drugoga i kad su omjeri svakih dviju istoimenih stranica među sobom jednaki. Ili kraće: Dva su mnogokuta slična, kad se oni podudaraju u kutovima i kad su istoimene stranice upravno razmjerne.

Istoimene ili homologne stranice one su, koje spajaju vrhove jednakih podudarajućih se kutova. Neka su n. pr.



Lik 106.

u liku 106. ovi kuti među sobom jednaki: $A = A_1$, $B = B_1$. $C = C_1$, $D = D_1$, onda su istoimene ili homologne stranice AB i A_1B_1, zatim BC i B_1C_1, tako isto CD i C_1D_1, DA i D_1A_1. Ako su dakle još i uvjeti $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CD : C_1D_1 = DA : D_1A_1$ ispunjeni, onda su oba mnogokuta slična: $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

Uvjet, da su omjeri svakih dviju istoimenih stranica jednaki može se još i na drugi način izreći i matematički izraziti. Ako

na ime označimo onaj broj, kojemu je omjer $AB : A_1B_1$, jednak, t. j vrijednost ili kvocijenat toga omjera sa m, onda je $AB : A_1B_1 = m$, $BC : B_1C_1 = m$, $CD : C_1D_1 = m$... dakle $AB = m \cdot A_1B_1$, $BC = m \cdot B_1C_1$, $CD = m \cdot C_1D_1$, ...).

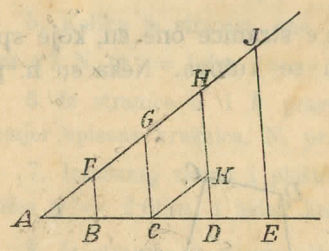
S toga se veli, stranice jednoga mnogokuta su jednaki višekratnici istoimenih stranica drugoga mnogokuta, ili one su sa ovima upravno razmjerne.

Iz ovoga što je rečeno, slijedi neposredno ispravnost ovih poučaka:

Dva su mnogokuta slična, ako je svaki od njih sličan trećemu.

Dva slična mnogokuta su sukladna, ako imaju dvije istoimene stranice jednake.

§. 104. **Dijeljenje pružaca.** Ako odmjeriš na jednom kraku kuta od vrha više jednakih pružaca te potegneš kroz djelišta paralelne pravce do drugoga kraka, to postane na drugom kraku baš toliko među sobom jednakih pružaca.



Lik 107.

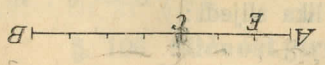
Neka je (lik 107.) $AB = BC = CD = DE$, zatim $BF \parallel CG \parallel DH \parallel EJ$. Da dokažeš, da je n. pr. $GH = AF$, potegni $CK \parallel GH$. Onda je $CK = GH$, jer je $CKHG$ paralelogram, a $CK = AF$, jer su trokuti ABF i CDK sukladni. S toga je $GH = AF$.

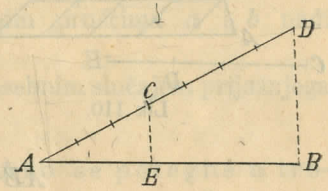
1. Zadatak. Neka se zadani pružac na n jednakih dijelova razdijeli.

Rješenje. Potegni iz jedne krajne točke A zadanoga prušca AE (lik 107.) jedan pravac, pa na ovom iz A prenesi n jednakih pružaca, onda krajnu točku J posljednjega prušca spoji sa E, i potegni kroz druga djelišta usporednice sa EJ. U ostalom dovoljno je, da potegneš usporednicu samo točkom H, koja je pred točkom J.

2. Zadatak. Neka se zadani pružac po zadanom brojnom omjeru razdijeli.

Rješenje. Da pružac AB (lik 108.) po omjeru 3 : 4 razdijeliš, razdijeli ga najprije na $3 + 4 = 7$ jednakih dijelova. Krajna točka C trećega dijela je tražena točka, jer je $AC = 3 . AE$, $CB = 4 . AE$, dakle $AC : CB = 3 : 4$. — Najjednostavnije izvađanje crtnje razabira se iz lika 109.


Lik 108.



Lik 109.

Zadaci za vježbu: Razdijeli zadani pružac

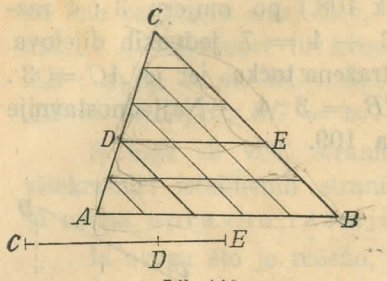
1. na 6 jednakih dijelova;
2. na 9 jednakih dijelova;
3. po omjeru $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$;
4. na tri dijela, koji se odnose kao 2 : 3 : 4.
5. Nacrtaj trokut (paralelogram), koji ima sa zadanim trokutom (paralelogramom) jednaku osnovnicu, te se onaj prema ovomu odnosi kao 3 : 4. — Uvaži, da se dva trokuta (paralelograma) s jednakim osnovnicama odnose kao njihove visine:

$$p : p_1 = \frac{g \cdot v}{2} : \frac{g \cdot v_1}{2} = v : v_1.$$

6. Nacrtaj trokut (paralelogram), koji ima sa zadanim trokutom (paralelogramom) jednaku visinu, te se onaj prema ovomu odnosi, kao 5 : 3.

§. 105. **Postanak razmjernih pružaca.** Ako potegneš u trokutu s jednom stranicom usporednicu, to će se obje druge stranice razdijeliti razmjerno, i stranice su novoga trokuta razmjerne sa stranicama zadanoga trokuta.

Neka je (lik 110.) $DE \parallel AB$ i stranica AC točkom D razdijeljena po omjeru 2 : 3, dakle $AD : DC = 2 : 3$. Ako potegnemo kroz djelišta usporednice sa AB, to će se stranica BC razdijeliti također na pet jednakih dijelova, od kojih otpadaju dva na BE a tri na EC. Dakle je $BE : EC = 2 : 3$, s toga također



Lik 110.

$AD : DC = BE : EC$, t. j. odsječci stranice AC odnose se baš tako, kao oni stranice BC, ili drugim riječima, stranice AC i BC dijele se pruščem DE razmjerno.

Ako se dalje potegnu kroz djelišta stranice AC usporednice prema stranici BC, to iz promatranja lika slijedi:

$$AB : DE = 5 : 3$$
$$BC : EC = 5 : 3$$
$$CA : CD = 5 : 3$$

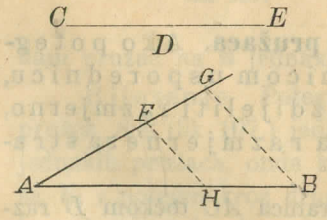
ili $AB : DE = BC : EC = CA : CD$,

t. j. stranice su novoga trokuta sa stranicama zadanoga trokuta razmjerne. Do istih resultata bi došli, da smo stranicu AC točkom D razdijelili po omjeru $m : n$, gdje m i n znače koje god cijele brojeve.

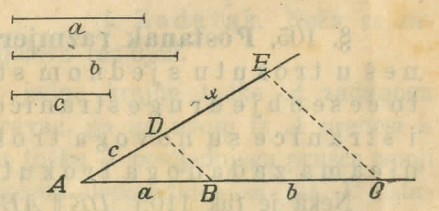
Zadatak za vježbu: U liku 110. neka je $AB = 12cm$, $BC = 15cm$, $AC = 11cm$, $AD = 3cm$. Kolike su stranice trokuta CDE?

1. Zadatak. Zadani pružac neka se po zadanom omjeru pružaca razdijeli.

Da se pružac AB razdijeli po omjeru $CD : DE$ (lik 111.), nacrtaju se na krakovima kojega god dupljastoga kuta GAB prušci



Lik 111.



Lik 112.

$AF = CD$, $FG = DE$ pa se potegne $FH \parallel GB$. Točkom H razdijeljen je pružac AB po omjeru $CD : DE$.

2. Zadatak. K trima zadanim pružcima a, b, c nađi četvrtu mjerstvenu proporcionalu ili razmjernicu.

Nacrtaj na kracima kojega god dupljastoga kuta (lik 112.) $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, pa potegni $CE \parallel BD$. Pružac $DE = x$ zadovoljava uvjetu $a : b = c : x$.

3. Zadatak. K dvjema zadanim pružcima a i b nađi treću mjerstvenu proporcionalu.

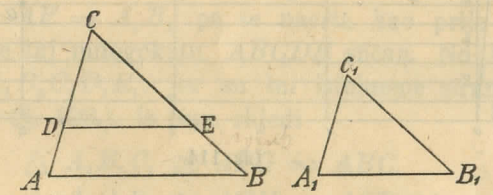
Ovaj zadatak može se smatrati posebnim slučajem prijašnjega ($a : b = b : x$).

§. 106. **Sličnost trokuta.** a) Ako se potegne u trokutu prema jednoj stranici usporednica, tada je odrezani trokut sličan zadanomu.

Neka je u trokutu ABC (lik 113.) $DE \parallel AB$, to se trokuti ABC i DEC podudaraju u kutovima, a istoimene stranice su razmjerne (§. 103.), Iz toga slijedi $\triangle ABC \sim DEC$.

b) Dva su trokuta slična, kad se oni u kutovima podudaraju.

Ako se na ime trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ (lik 113.) u kutovima podudaraju tako, da je $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, to



Lik 113.

se oba trokuta mogu tako sastaviti, da kraci jednakih kutova C i C_1 padnu jedan po drugom, a stranica A_1B_1 dodje u položaj DE paralelan sa AB. Iz toga se zaključuje po prednjoj poučci a), da su trokuti slični.

Zadaci za vježbu: Nacrtaj trokut $A_1B_1C_1$ sličan zadanomu trokutu ABC,

1. ako je zadana sa stranicom AB istoimena stranica A_1B_1;

2. ako je omjer istoimenih stranica $AB : A_1B_1$ jednak brojnom omjeru $4 : 3$;

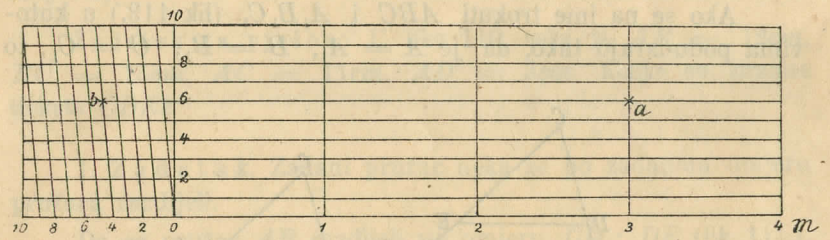
3. ako je omjer istoimenih stranica $BC : B_1C_1$ jednak omjeru $a : a_1$ dvaju zadanih pružaca;

4. ako je sa AB istoimena stranica A_1B_1 četvrta mjerstvena proporcionala stranica AB, BC, CA.

5. U trokutu ABC je $AC = 6\ cm$, $BC = 4{\cdot}5\ cm$, $CA = 5\ cm$. Nacrtaj ovomu sličan trokut, u kojem je jedna stranica $4cm$ duga. Koliko rješitaba dopušta ovaj zadatak? Kolike su u svakom od tih slučajeva ostale stranice novoga trokuta?

6. Za što su svaka dva istostranična trokuta slična? Za što svaka dva istokračna pravokutna trokuta?

7. Odredi dužinu prušca ab (lik 114.), ako se uzme, da je pružac od 0 do 1 jednak 1 metru. — Razjašnjenje. Iz lika 110. jasno je, da su u trokutu ABC sa AB paralelni prušci po redu jednaki $\frac{1}{5}\ AB$, $\frac{2}{5}AB$, $\frac{3}{5}AB$, itd. Sličnim načinom tumači se upotreba priječničkoga ili transverzalnoga mjerila, kojega se uređenje razabira iz lika 114.



Lik 114.

dvi

§. 107. **Sličnost mnogokutâ.** Zadatak. Nacrtaj zadanomu mnogokutu sličan, ako je zadana jedna stranica novoga mnogokuta.

Riješenje. Neka je $ABCDE$ (lik 115.) zadani mnogokut a s zadana sa AB istoimena stranica novoga mnogokuta.

Potegni dvokutnice AC i AD, načini $AF = s$ pa nacrtaj $FG \parallel BC$, $GH \parallel CD$, $HJ \parallel DE$.

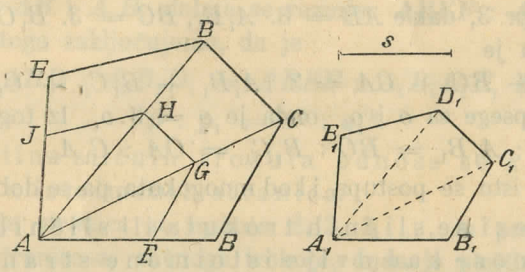
Oba mnogokuta $ABCDE$ i $AFGHJ$ podudaraju se u kutovima (za što?), a istoimene su im stranice razmjerne, jer je

$\triangle ABC \sim AFG$, dakle $AB : AF = BC : FG = AC : AG$,
$\triangle ACD \sim AGH$, „ $AC : AG = CD : GH = AD : AH$,
$\triangle ADE \sim AHJ$, „ $AD : AH = DE : HJ = AE : AJ$.

Iz toga slijedi $ABCDE \sim AFGHJ$. Ako se zatim mnogokut $AFGHJ$ prenese u položaj $A_1B_1C_1D_1E_1$ (§. 76.), to je također $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1$.

Poučka. Ako se razdijele dva slična mnogokuta istoimenim dvokutnicama na trokute, to su trokuti jednoga mnogokuta slični po redu trokutima drugoga mnogokuta.

U sličnim mnogokutima $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ (lik 115.) su AC i A_1C_1, zatim AD i A_1D_1 istoimene dvokutnice, t. j. ta-



Lik 115.

kove, koje spajaju vrhove podudarajućih se jednakih kutova. Ako se načini $AF = A_1B_1$ pa se nacrta kao prije mnogokut $AFGHJ$, to je taj mnogokutu $ABCDE$ sličan. No također je $AFGHJ \cong A_1B_1C_1D_1E_1$, jer su im istoimene stranice AF i A_1B_1 jednake (§. 103.). Iz toga slijedi

$$\triangle A_1B_1C_1 \cong AFG \sim ABC,$$
$$\triangle A_1C_1D_1 \cong AGH \sim ACD \text{ itd.}$$

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj mnogokutu $ABCDE$ (lik 115.) sličan mnogokut, u kojem će biti zadani pružac s istoimena stranica sa BC.

2. Dokaži, da su dva pravilna mnogokuta s jednakim brojem stranica slična.

3. Nacrtaj zadanomu mnogokutu (n. pr. šesterokutu) sličan mnogokut tako, da bude omjer dviju istoimenih stranica jednak a) zadanomu omjeru dvaju pružaca, b) brojnomu omjeru 2 : 3.

4. Na zemljovidu načinjenom po mjerilu 1 : 1200 iznosi udaljenost dviju točaka $82mm$. Kolika je udaljenost ovih točaka a) na

zemlji, b) na drugom kojem zemljovidu, koji je načinjen po mjerilu 1 : 5000?

Opaska. Svaki mnogokut na zemljovidu, na planu itd. sličan je odgovarajućemu mnogokutu na zemlji. Omjer dviju istoimenih stranica određuje se „mjerilom".

5. Kolik je pružac od $1km$ na zemljovidu, koji je načinjen po mjerilu 1 : 150.000?

§. 108. **Omjeri opsega sličnih likova.** Neka je u dva slična trokuta ABC i $A_1B_1C_1$ omjer dviju istoimenih stranica jednak n. pr. 3, dakle $AB = 3.\ A_1B_1$, $BC = 3.\ B_1C_1$, $CA = 3.\ C_1A_1$, onda je

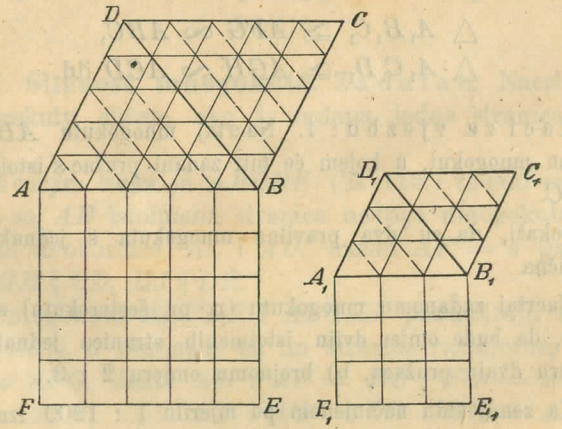
$AB + BC + CA = 3.\ (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1)$, ili ako označimo opsege sa o i o_1 onda je $o = 3.o_1$. Iz toga slijedi $o : o_1 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

Tako isto se postupa i kod mnogokuta, pa se dobije poučka:

Opsezi se sličnih trokuta ili sličnih mnogokuta odnose kao dvije istoimene stranice.

Zadatak za vježbu: Od dva slična trokuta su stranice jednoga $a = 12cm$, $b = 9cm$, $c = 14cm$, a obseg drugoga je 56 cm. Kolike su stranice drugoga trokuta?

§. 109. **Omjeri ploština sličnih likova.** a) Neka je u sličnim paralelogramima $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ (lik 116.) omjer



Lik 116.

dviju istoimenih stranica = 5 : 3, to se može razdijeliti $ABCD$ na $5 \times 5 = 25$ a $A_1B_1C_1D_1$ na $3 \times 3 = 9$ manjih paralelograma, koji su svi sukladni. Ako označimo sa t ploštinu jednoga od onih trokutića, na koje se mali paralelogrami raspadaju, kad se potegnu u njima sa BD i B_1D_1 paralelne dvokutnice, to je $ABCD = 50.t$, $A_1B_1C_1D_1 = 18.t$, dakle $\triangle ABD = 25.t$, $A_1B_1D_1 = 9.t$.

Iz toga slijedi:

$\triangle ABD : A_1B_1D_1 = 25 : 9$. Za četvorine na istoimenim stranicama AB i A_1B_1 dobije se razmjer $ABEF : A_1B_1E_1F_1 = 25 : 9$. Iz toga zaključujemo, da je

$$ABD : A_1B_1D_1 = ABEF : A_1B_1E_1F_1 \text{ ili}$$
$$p : p_1 = a^2 : a_1{}^2.$$

Ploštine sličnih trokuta odnose se kao četvorine dviju istoimenih stranica.

Ako je stranica a trokuta 2, 3, 4, ... m puta veća od istoimene stranice a_1 sličnoga trokuta, onda je ploština p prvoga trokuta 4, 9, 16, ... m^2 puta veća od ploština p drugoga trokuta. Iz $a = m.a_1$ slijedi dakle $p = m^2.p_1$.

b) Da se ploštine sličnih mnogokuta isporediti mogu, razdijele se oni istoimenim dvokutnicama na trokute.

Ako uzmemo u liku 115. $AB = m.A_1B_1$, to je

$$\begin{aligned} ABC &= m^2.A_1B_1C_1 \\ ACD &= m^2.A_1C_1D_1 \\ ADE &= m^2.A_1D_1E_1 \\ \hline ABCDE &= m^2.A_1B_1C_1D_1E_1. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi:

$ABCD : A_1B_1C_1D_1E_1 = ABC : A_1B_1C_1 = \overline{AB^2} : \overline{A_1B_1{}^2}$.

Ploštine se sličnih mnogokuta odnose kao četvorine dviju istoimenih stranica.

Zadaci za vježbu: 1. Dvije istoimene stranice dvaju sličnih trokuta (mnogokuta) su $a = 15cm$, $a_1 = 12$ cm. Kolika je ploština drugoga trokuta (mnogokuta), ako je ploština prvoga $1dm^2$?

2. Ako uzmemo, da je dužina jedne stranice $1cm$, onda je

ploština pravilnoga peterokuta = $1{\cdot}7205cm^2$
„ „ šesterokuta = $2{\cdot}5981cm^2$
„ „ osmerokuta = $4{\cdot}8285cm^2$.

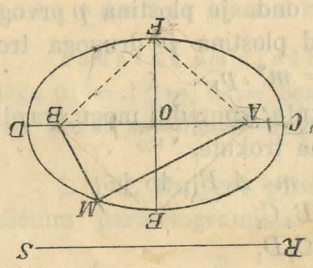
Kolika je ploština u svakom od ta tri slučaja, ako je stranica a) $1m$, b) $23cm$, c) $2{\cdot}15m$.

3. Ako je linearno povećanje pod sitnozorom 80-terostruko, koliko je plošno povećanje?

Čunjosječice.*)

I. Elipsa.

§. 110. **Razjašnjenje.** Ako se točka tako giblje, da je zbroj njezinih daljina od dvije zadane točke uvijek postojan, to će ona opisati zatvorenu krivulju koja se zove elipsa. Elipsa je dakle mjerstveno mjesto svih točaka, za koje je zbroj daljina od dvije zadane točke postojan.



Lik 117.

Dvije zadane točke A i B (lik 117.) zovu se žarišta (focus), sredina O prušca AB zove se središte elipse. Daljine AM i BM jedne točke M elipse od žarišta zovu se provodnice (radii vectores) točke M. Spojnica dviju točaka elipse zove se tetiva, a sva a tetiva, koja ide središtem, zove se promjer elipse. Promjer CD, koji ide žarištima, zove se također velika os, a na ovoj okomiti promjer EF zove se mala os elipse. Udaljenost jednoga žarišta od središta zove se vansredišnjica ili ekscentricitet a krajne točke obiju osi zovu se vrhovi elipse.

§. 111. **Svojstva elipse.** 1. Elipsa je s obzirom na obje osi sumjerna. Ako se naime elipsa oko jedne osi okrene, to će koja god nijezina točka M pasti na drugu koju točku jednakih provodnica (P ili N u liku 118.). Dakle je $CO = DO$, $EO = FO$, $AC = BD$.

*) Razjašnjenje toga imena nalazi se u §. 165.

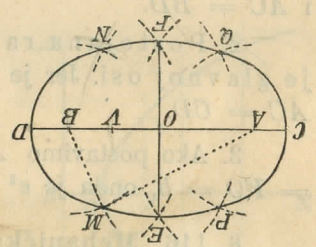
2. Postojani zbroj obiju provodnica jedne točke jednak je velikoj osi. Jer je $AM + BM = AC + CB = CB + BD = CD$.

3. Provodnica krajne točke male osi jednaka je polovini velike osi. Jest na ime $AF + BF = CD$ i $AF = BF$, dakle $AF = \frac{1}{2}\ CD = CO$.

Ako se označe, kako je običaj, sa a, b i e polovina velike osi, polovina male osi i ekscentricitet, to je iz pravokutnoga trokuta AOF : $a^2 = b^2 + e^2$. (Riječima?).

§. 112. **Mehanička crtnja elipse.** U točkama A i B učvrsti dva čavlića, pa stavi oko njih konac, kojemu si krajeve prije svezao. Onda potezi pisaljku M uz konac tako da budu dijelovi AM, BM i AB konca neprestano zapeti, tada će pisaljka opisati elipsu; jer je za sva mjesta točke M zbroj $AM + BM$ uvijek postojan i to za AB manji od dužine konca.

§ 113. **Mjerstvena crtnja elipse.** Ako je poznata velika os i ekscentricitet elipse, to se može naći točaka elipse, koliko se hoće, na ovaj način: Najprije odredi položaj točaka O, A, B, C i D (lik 118.), a onda opisi, da nađeš vrhove E i F, iz točke A polumjernom CO dva luka, koji će se presjeći lukovima istoga polumjera iz točke B opisanima. Druge četiri s obzirom na obje osi sumjerne točke M, N, P i Q naći ćeš, ako iz A i B drugim kojim polumjerom n. pr. C V opišeš četiri luka, koji će se lukovima iz B polumjerom DV opisanima presjeći itd.



Lik 118.

Zadaci za vježbu: 1. Nacrtaj mehanički elipsu s velikom osi $2a = 26cm$ i s malom osi $2b = 24cm$. Kolik mora biti konac, i u kojoj se udaljenosti moraju čavlićima učvrstiti?

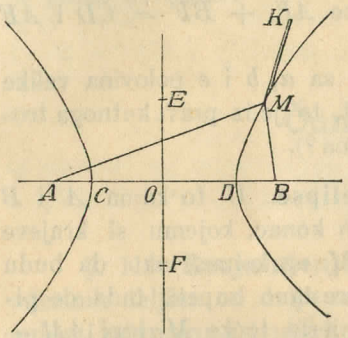
2 Kakav oblik prima elipsa, ako njezin ekscentricitet iščezne ili ako bude on jednak velikoj osi?

II. Hiperbola.

§. 114. **Razjašnjenja.** Ako se točka tako giblje da je razlika njezinih daljina od dvije zadane točke uvijek postojana

*

to će ona opisati otvorenu krivulju, koja se zove hiperbola. Hiperbola se sastoji od dvije odijeljene grane (Lik 119.), te se s toga ne može jednim potezom nacrtati.



Lik 119.

A i B su žarišta, O je središte. AM i BM zovu se provodnice. Tetive, promjeri. CD je glavna os, C i D su vrhovi hiperbole. $AO = BO$ zove se vansredišnjica ili ekscentricitet, a EF drugotna os, ako je $CE = CF = AO$.

§. 115. **Svojstva hiperbole.** 1. Hiperbola je s obzirom na obje osi sumjerna. Dakle je $CO = DO$ i $AC = BD$.

2. Postojana razlika obiju provodnica jednaka je glavnoj osi. Jer je $AM - BM = AD - BD = AD - AC = CD$.

3. Ako postavimo $AO = CE = e$. $CO = DO = a$, $EO = FO = b$, onda je $e^2 = a^2 + b^2$. (Riječima?)

§. 116. **Mehanička crtnja hiperbole.** Učvrsti u A i B (lik 119.) krajeve konca, drži ga n. pr. na čvoru u K, a pisaljku postavi između dijelova AMK i BMK, koji se kod M križaju, ili se kakovom karikom skupa drže. Ako sad pisaljku, (koja je u karici) a koliko je od potrebe i čvor K pomičeš, ali tako da budu svi dijelovi konca zapeti, to će pisaljka načiniti jedan dio grane hiperbole. Pošto se dijelovi AM i BM konca kod pomicanja pisaljke za jednake dužine skraćuju ili produžuju, to ostaje razlika $AM - BM$ postojana. — Izmijenivši krajeve konca može se na isti način nacrtati jedan dio druge grane hiperbole.

§. 117. **Mjerstvena crtnja hiperbole.** Uzmi u glavnoj osi izvan prušca CD jednu točku V (lik 119.), pa opiši iz točaka A i B lukove polumjerom CV i presijeci ih lukovima, koje ćeš opisati iz B i A polumjerom VD. Na taj način dobit ćeš četiri točke hiperbole, itd.

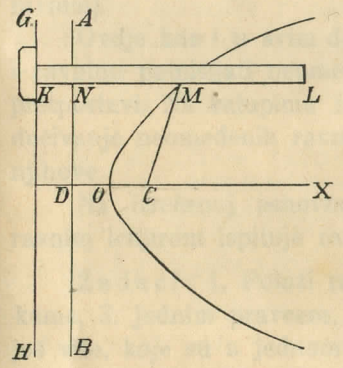
III. Parabola.

§. 118. **Razjašnjenja.** Ako se točka tako giblje, da je njezina daljina od zadanoga pravca uvijek jednaka daljini od zadane točke, to će ona opisati otvorenu krivulju, koja se zove parabola.

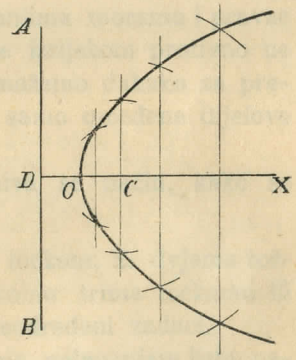
Zadani pravac AB (lik 120.) zove se smjernica (directrix), zadana točka C zove se žarište parabole. Na smjernici okomica, koja ide žarištem, zove se os (OX), a njezino sjecište s parabolom vrh parabole (O). Pružac, koji spaja žarište s jednom točkom parabole, zove se provodnica ove točke (CM).

Iz postanka parabole slijedi, da je obzirom na svoju os sumjerna. (Gledaj također lik 121.)

§. 119. **Mehanička crtnja parabole.** Jedan kraj konca učvrsti u točci C (lik 120.), a drugi kraj u jednoj točci L brida



Lik 120.



Lik 121.

KL „risarskog lenjira“. Pomiči sada lenjir uz brid GH pisaće ili risaće ploče tako, da bude KL uvijek na GH okomito a ujedno drži pisaljkom M na bridu KL dijelove CM i LM konca zapete, tada će pisaljka načiniti jedan luk parabole. Pošto se prušci CM i KM kod toga za jednake dijelove produžuju ili skraćuju, to ostaje razlika $KM - CM$ postojana. Ako je $AB \parallel HG$, to je također razlika $NM - CM$ postojana i to jednaka ništici, dakle $NM = CM$, ako se načini $DO = OC$.

§ 120. **Mjerstvena crtnja parabole.** Ako je smjernica AB (lik 121.) i žarište C sa svojim položajem zadano, to najprije nacrtaj $XD \perp AB$ i vrh O, pošto si pružac CD raspolovio. Za tim potegni prema AB više paralelnih pravaca, pa presijeci svaki od njih iz točke C dvjema lukovima, koj ma je polumjer daljina odnosne usporednice od AB Sjecišta se nalaze očito na paraboli, koja se je imala nacrtati.

Tjelomjerstvo.

(Stereometrija.)

Ravnina.

§. 121. **Osnovna svojstva ravnine.** Pomoću predstava, koje imamo o pravcu i ravnini, uvidjet ćemo odmah ispravnost ove poučke:

Ako ima pravac s ravninom dvije točke zajedničke, to je on sasvim u toj ravnini. (Osnovna poučka o ravnini).

Ovdje kao i u svim daljim promatranjima moramo i pravac i ravninu pomišljati neomeđenima, ako se izrijekom protivno ne pretpostavi. Na kalupima i u crtežima možemo dakako za predočivanje neomeđenih ravnina upotrebiti samo omeđene dijelove njihove

Na izrečenoj osnovnoj poučci osniva se način, kako se ravnim lenjirom ispituje ravnina.

Zadaci: 1. Položi ravninu jednom točkom, 2. dvjema točkama, 3. jednim pravcem, 4. Položi ravninu trima točkama ili još više, koje su u jednom pravcu. — Neodređeni zadaci.

Predoči sebi izvađanje traženih crtnja polaganjem lista papira ili kakove daščice na ugao i na brid stola.

5. Položi ravninu trima točkama, koje nijesu u jednom pravcu. Najprije položi ravninu dvjema točkama a onda je okreći oko pravca, koji ide onima točkama tako dugo, dok ne dođe i treća točka u ravninu. (Određen zadatak).

6. Pravcem i točkom izvan njega položi ravninu. (Zad. 5.).

7. Položi ravninu dvjema pravcima, koji se sijeku. Položi ravninu jednim od oba pravca i jednom točkom A drugoga pravca (Zad. 6.); onda ima drugi pravac s ovom ravninom dvije

točke zajedničke i to sjecište svoje s prvim pravcem i točku, *A*, on je dakle sasvim u ravnini.

8. Položi ravninu dvjema paralelnim pravcima.

Ako položiš ravninu po jednom (*a*) od dva paralelna pravca i jednom točkom (*A*) drugoga pravca, to pada i drugi pravac (*b*) u istu ravninu.

Četiri posljednja zadatka su izvjesno određena, jer svaki daje samo jednu jedinu rješidbu.

Iz toga slijedi:

Ravnina je izvjesno određena:

a) trima točkama, koje nijesu u jednom pravcu;
b) jednim pravcem i točkom izvan njega;
c) dvjema pravcima koji se sijeku;
d) dvjema paralelnim pravcima.

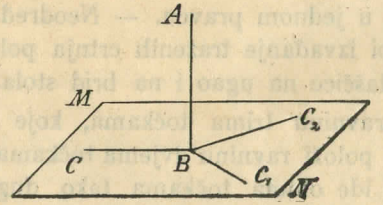
9. Neka se zadanom točkom prema zadanomu pravcu potegne usporednica.

Ravnina, u kojoj po prijašnjemu obje usporednice moraju biti, očito je određena zadanim pravcem i zadanom točkom. U toj se potegne tražena usporednica. Iz toga se vidi, da se i u prostoru jednom točkom prema jednomu pravcu samo jedna jedina usporednica potegnuti može.

§. 122. **Postanak ravnine.** Možemo misliti, da ravnina postane:

1. kad se pravac omiče uz dva pravca, koji se sijeku;

2. kad se pravac oko jedne svoje točke okreće, a kod toga se uz jedan pravac omiče;



Lik 122.

3. kad se pravac prema sebi paralelno omiče uz drugi koji pravac;

4. kad se pravac omiče uz dva među sobom paralelna pravca;

5. Kad se pravi kut okrene oko jednoga svoga kraka. Ako se n. pr. okreće pravi kut *ABC* (lik 122.) oko kraka *AB*, to će drugi krak *BC* opisati ravninu *MN*.

Pravac, čijim gibanjem postane ravnina, zove se tvorni pravac; kad se taj uz druge pravce omiče, to se ovi zovu smjernice ili provodni pravci.

Zadatak za vježbu: Koju plohu opisuje donji brid vratâ, kad se otvaraju.

Glavni položaji pravaca i ravnina.

§. 123. **Dva pravca.** Dva pravca mogu imati među sobom tri bitno različna položaja:

1. oni se sijeku; 2. oni su paralelni; 3. oni niti se sijeku a niti su paralelni, onda se veli, oba su pravca skrštena.

U prva dva slučaja su pravci u jednoj ravnini, a u trećem slučaju nijesu.

Potraži primjere za tri bitno različna položaja dvaju pravaca na bridovima ormara, školske sobe itd.

§. 124. **Dvije ravnine.** Ako neimaju dvije ravnine u cijelom svojem rasprostranjenju ni jedne točke zajedničke, to su one paralelne. Ako imaju zajedničkih točaka, tad su ove točke u pravcu, koji se zove sjecišnjicom obiju ravnina, te se u tom slučaju veli, ravnine se sijeku. Ako naime položimo pravac dvjema točkama, koje su objema ravninama zajedničke, to taj pravac pada u svaku od obiju ravnina, on je dakle sjecišnjicom. Izvan ovoga pravca ne mogu ravnine imati ni jednu drugu točku zajedničku, jer se jednim pravcem i točkom izvan njega može položiti samo jedna ravnina, a ne dvije.

Potraži primjere za dvije paralelne ravnine i za dvije, koje se sijeku, na stranama ormara, na zidovima sobe itd.

§. 125. **Pravac i ravnina.** Ako pravac i ravnina u cijelom svom razprostranjenju nemaju ni jedne točke zajedničke, onda su oni paralelni. Ako pravac i ravnina nijesu paralelni, a imaju samo jednu točku zajedničku, to se točka ova zove sjecište pravca s ravninom ili podnožište pravca u ravnini

te se veli, pravac je zgodio ravninu ili ravnina siječe pravac. Ako ima napokon pravac više nego jednu točku s ravninom zajedničku, to on pada sasvim u ravninu. (§. 121.).

Nađi primjere za tri spomenuta položaja pravca prema ravnini, u školskoj sobi.

Određivanje položaja pravaca prema ravninama.

§. 126. **Okomica ravnine.** Ako se zavrti pravi kut ABC (lik 122.) oko kraka AB, to će drugi krak BC opisati ravninu. S toga je pravac AB okomit na svim pravcima BC, BC_1, BC_2, ..., koji idu njegovim podnožištem B u ravnini MN. Ovaj međusobni položaj pravca i ravnine označuje se tako, da se veli, pravac i ravnina su jedno na drugom okomiti. Pravac se onda zove okomicom ravnine.

Pravac je okomicom ravnine, kad je on okomit na svim pravcima, koji idu njegovim podnožištem u ravnini.

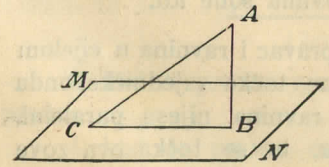
Pošto su za određenje ravnine dovoljna dva pravca BC i BC_1, koji se sijeku, to imamo poučku:

Pravac je okomicom ravnine, kad je on okomit na dvjema pravcima, koji idu njegovim podnožištem u ravnini.

Pravac je prema ravnini priklonjen ili kös, kad on nije s njom niti paralelan niti na njoj okomit.

Zadaci za vježbu: 1. Jednom točkom pravca položi na ovaj okomitu ravninu. Upotrebi prijašnju poučku.

2. Kakav položaj prema ravnini ima pravac, koji samo na jednom pravcu potegnutom kroz njegovo podnožište u ravnini stoji okomito?



Lik 123.

§. 127. **Daljine točke od ravnine.** Neka je AB (lik 123.) okomica na ravnini MN a C koja god točka iste ravnine, to je $AB < AC$ (za što?); iz toga slijedi: Okomica iz jedne točke na ravninu najkraći je pružac između ravnine i točke, pa se on stoga zove daljina ili razmak točke od ravnine.

Zadaci za vježbu: 1. Za što ne mogu dva pravca AB i AC (lik 123.) da budu istodobno okomicama jedne iste ravnine? (Poučka.)

2. Mogu li dvije okomice jedne iste ravnine imati zajedničko podnožište? (Poučka).

3. Koji pravci ravnine imaju od neke točke izvan ravnine iste daljine, kao i ravnina?

§. 128. **Okomito projiciranje.** Pod okomitim projiciranjem točke na ravninu razumijevamo opredjeljivanje podnožišta okomice iz one točke na ravninu spuštene. To podnožište zove se projekcija.

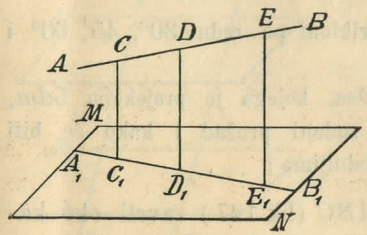
Projekcija neke crte na ravninini je skûp projekcija svih njezinih točaka. Da se dakle nađe projekcija pravca AB (lik 124.) na ravnini MN, pomišljaj, da se okomica CC_1 uz pravac AB omiče paralelno sama prema sebi, t. j da ona svoj okomiti položaj prema ravnini MN pridržava. Kod pomicanja opisat će okomica ravninu (§. 122. 3.), te je njezina sjecišnjica A_1B_1 sa ravninom MN tražena projekcija pravca AB. Iz toga slijedi:

Projekcija pravca je u opće pravac. No ako je pravac prema ravnini okomit, onda je njegova projekcija točka

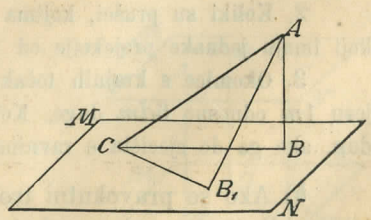
Zadaci za vježbu: 1 Neka se zadani pravac na ravninu projicira.

2. Neka se zadani pružac na ravninu projicira.

3. Neka se trokut na ravninu projicira.



Lik 124.



Lik 125.

§. 129. **Priklon pravca prema ravnini.** Pod priklonom pravca prema ravnini razumijeva se kut, što ga pravac sa svojom projekcijom u toj ravnini čini. Tako je n. pr. $\sphericalangle ACB$ priklon pravca AC (lik 125.) prema ravnini MN, ako je $AB \perp MN$. Priklon pravca BO (lik 126.) prema ravnini MN je $\sphericalangle BOA$, ako se potegne $OO_1 \perp MN$, $BB_1 \perp MN$ i $OA \parallel O_1B_1$.

Poučka: Priklon pravca je najmanji od svih kutova, koje on čini s pravcima, koji idu u ravnini njegovim podnožištem.

Ako se na ime projicira (lik 125.) pružac AC na ravninu MN, a projekcija BC se oko točke C okreće, dok ne dođe u drugi koji položaj B_1C u ravnini MN, to je očevidno, $AC = AC$, $BC = B_1C$, dočim je $AB < AB_1$ (§. 127.) Iz toga slijedi:

$$\sphericalangle ACB < ACB_1. \text{ (§. 35., } b)$$

§. 130. **Snošaji između dužine, projekcije i priklona prušca.** Pomišljaj, da je sa ravninom MN (lik 126.) paralelan pružac OA na tu ravninu projiciran, a za tim da se u ravnini određenoj usporednicama OA i O_1A_1 oko točke O pružac OA okreće tako, da on dolazi redom u položaje OB, OC, OD.

Ako isporediš pružac u svim ovim položajima sa njegovim projekcijama, dobit ćeš ove poučke:

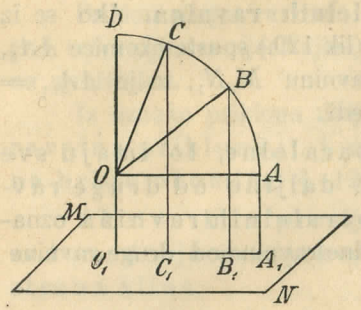
Ako je pružac sa ravninom paralelan (ako je priklon jednak ništici), tad je projekcija njegova jednaka njegovoj dužini. Ako priklon raste, to će biti projekcija manja, a kad je pružac prema ravnini okomit (priklon $= 90^0$), onda je dužina projekcije jednaka ništici.

Zadaci za vježbu: 1. Dužina prušca je $1m$, a priklon njegov u tri položaja je 30^0, 45^0, 60^0. Kolika je u svakom položaju projekcija?

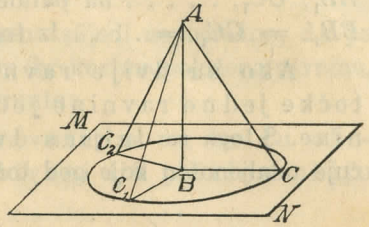
2. Koliki su prušci, kojima su prikloni po redu 30^0, 45, 60^0 i koji imaju jednake projekcije od $1m$?

3. Okomice s krajnih točaka prušca, kojega je projekcija $5dm$, jesu $1m$ odnosno $6dm$ duge. Kolik je zadani pružac i kako će biti dug, ako ga do sjecišta s ravninom produljimo?

b) Ako se pravokutni trokut ABC (lik 127.) zavrti oko katete AB, to će druga kateta BC opisati ravninu MN, na



Lik 126.



Lik 127.

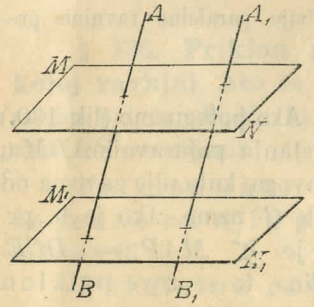
kojoj je AB okomica (§. 126.) Ujedno će točka C opisati kružnicu, kojoj je središtem projekcija točke A. Pošto je još $AC = AC_1 = AC_2 = \ldots\ldots$, to slijedi:

Podnožišta svih jednakih pružaca iz jedne točke na ravninu potegnutih nalaze se u kružnici, kojoj je središtem projekcija zadane točke.

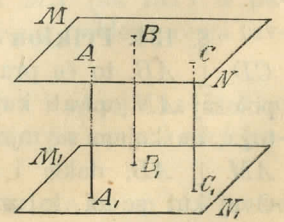
§. 131. **Još neke poučke o priklonu.** Ako se pomakne pravac AB (lik 128.) paralelno sam prema sebi u položaj A_1B_1, tad se njegov priklon prema ravnini MN nije promijenio. Ako se ravnina MN paralelno sama prema sebi pomakne u položaj M_1N_1, to se ni sada nije promijenio priklon, što ga ona s pravcem AB čini. Iz toga slijedi:

1. Dva paralelna pravca čine sa ravninom, koja ih siječe jednake priklone.

2. Dvije paralelne ravnine čine sa pravcem, koji one sijeku, jednake priklone.



Lik 128.

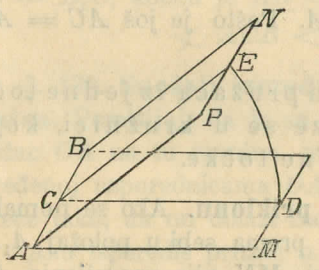


Lik 129.

§. 132. **Daljina dviju paralelnih ravnina.** Ako se iz točaka $A,B,C, \ldots$ ravnine MN (lik 129.) spuste okomice AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ na paralelnu ravninu M_1N_1, to je $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$ Iz toga slijedi:

Ako su dvije ravnine paralelne, to imaju sve točke jedne ravnine jednake daljine od druge ravnine. S toga se daljina dviju paralelnih ravnina označuje udaljenošću koje god točke jedne ravnine od druge ravnine

Određivanje položaja dviju ravnina.



Lik 130.

§. 133. **Plošni kut ili klin.** Neomeđena ravnina dijeli se pravcem na dvije poluravnine. Ako se jedna poluravnina oko međašnice okreće, to se dio prostora, što ga je ona prevalila, zove plošni kut ili klin.

Sjecišnjica AB (lik 130.) zove se brid ili vršnica; poluravnine BM i AN zovu se kračne plohe ili strane, bokovi klina. Plošni kut u liku 130. označuje se $M(AB)N$ a tako i svaki drugi.

Zadaci za vježbu: 1. Kako se knjigom ili vratima može predočiti postanak klina?

2. Koliko klinova prave dvije ravnine, koje se sijeku?

3. Što se razumijeva pod vršnim klinom i suklinom?

4. Koliko se klinova stvori, kad se dvije paralelne ravnine presijeku trećom.

§. 134. **Priklon dviju ravnina.** Ako potegnemo (lik 130.) $CD \perp AB$, to će pravac CD kod okretanja poluravnine BM u položaj AN opisati kut DCE. Veličina ovoga kuta nije zavisna od toga, na kojem se mjestu brida AB vrh C uzme. Ako je n. pr. $AM \perp AB$, dakle i $AP \perp AB$ to je $\sphericalangle MAP = DCE$. Ovaj kut se za to uzima za mjeru klina, te se zove priklon dviju ravnina.

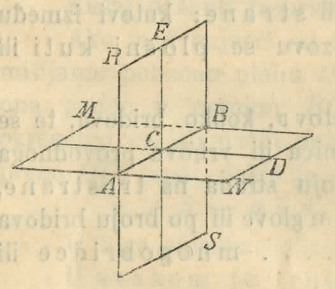
Priklon dviju ravnina nacrta se dakle tako, da se u kojoj god točci njihove sjecišnjice osove u objema ravninama okomice na sjecišnjicu.

Iz oznake priklona dviju ravnina slijedi neposredno, da je ravnina priklona, t. j. njegovim krakovima položena ravnina, na bridu okomita (§. 126.) Obrnuto:

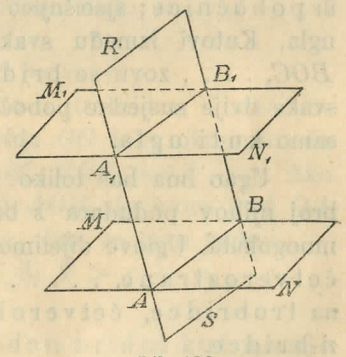
Ako se klin presiječe ravninom na bridu okomitom, to je presjekom dobiveni lik priklon obiju strana klina.

§. 135. **Okomiti položaj dviju ravnina.** Ako je priklon dviju ravnina pravi kut, onda se veli, ravnine su jedna na drugoj okomite.

Ako se n. pr. ravnina RS (lik 131.) oko sjecišnjice AB u ravnini MN tako dugo okreće, dok ne bude priklon $DCE = 90^0$, onda je $RS \perp MN$. Svakim daljim okretanjem iz toga položaja morat će se priklon povećati ili smanjiti.



Lik 131.



Lik 132.

§. 136. **Priklon paralelnih ravnina prema drugoj kojoj ravnini.** Ako se pomakne ravnina MN (lik 132) u paralelni položaj M_1N_1, to se time ne će njezin priklon prema ravnini RS promijeniti.

Priklon dakle dviju ravnina ostaje isti, ako se jedna od njih paralelno sama prema sebi pomiče; ili:

Paralelne ravnine čine jednake priklone sa ravninom, koja ih siječe

Iz toga slijedi: Ako je od dvije paralelne ravnine jedna na trećoj ravnini okomita, to je i druga.

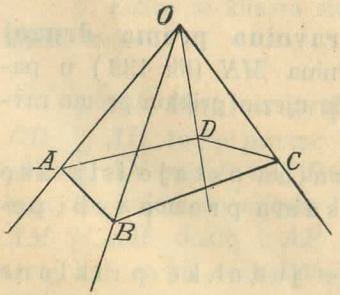
Jesu li dvije ravnine paralelne, ako su one na trećoj ravnini okomite?

Uglovi.

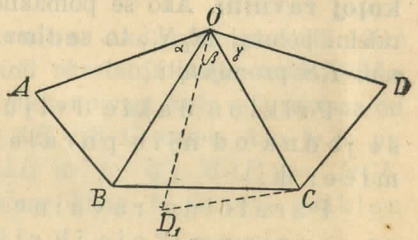
§. 137. **Razjašnjenja.** Ako se poluzraka omiče po opsegu mnogokuta, a krajna njezina točka pridrži svoje mjesto, to postane samo na jednu stranu neomeđen prostor, koji se zove ugao.

Poluzraka, koja se omiče, zove se tvorni pravac, a mnogokut, po kojem se je poluzraka omicala, zove se provodni mnogokut. Nepomična točka O (lik 133.) zove se vrh; taj ne smije biti u ravnini provodnoga mnogokuta. Pojedine ravnine načinjene zrakom, koja se omiče, zovu se pobočne plohe ili pobočnice; sjecišnjice njihove OA, OB,... zovu se bridovi ugla. Kutovi između svaka dva susjedna brida, n. pr. AOB, BOC, ... zovu se bridni kuti ili strane; kutovi između svake dvije susjedne pobočne plohe zovu se plošni kuti ili samo kuti ugla.

Ugao ima baš toliko bridnih kutova, koliko bridova, te se broj njihov podudara s brojem stranica ili vrhova provodnoga mnogokuta. Uglove dijelimo ili po broju strana na trostrane, četverostrane, ... n-strane uglove ili po broju bridova na trobridce, četverobridce, ... mnogobridce ili n-bridce.



Lik 133.



Lik 134.

Ako su svi bridni kutovi ili strane ugla jednaki, to se on zove istostran; ako su svi plošni kuti jednaki, zove se on istokutan. Ako je ugao istostran i istokutan, to se on zove pravilan.

Za pravljenje stereometričkih modela od tvrda papira služimo se mrežama. Mreža je ravan lik, koji se može izrezati i tako sastaviti, da se dobije traženi model.

Zadaci za vježbu: Nacrtaj: a) mrežu trobridca sa zadanim bridnim kutovima; b) mrežu istostrana trobridca; c) mrežu istostrana četverobridca. — U kojem od tih slučajeva je ugao svojom mrežom potpuno određen? Jesu li uglovi pod b) i c) pravilni?

§. 138. **Snošaji između bridnih kutova trobridca.** Da se trobridac od mreže (lik 134.) sastavi, okreću se pobočne plohe AOB i COD oko bridova OB i OC tako dugo, dok se bridi OA i OD (izvan ravnine BOC) ne sastanu. Da se to zbude, mora da je $\beta < \delta + \gamma$, pa bio β baš i najveći od bridnih kutova α, β, γ. Istim se načinom nađe $\alpha < \beta + \gamma$ i $\gamma < \alpha + \beta$.

Kušaj načiniti trobridac kad je $\beta = \alpha + \gamma$.

Ako je β najveći od bridnih kutova trobridca, i ako pomišljamo pobočnu plohu COD oko brida OC tako okrenutu, da ona padne u ravninu BOC, to je $\sphericalangle BOD_1 = \beta - \gamma$. Ako okrenemo na isti način pobočnu plohu AOB, to mora brid OA preko OD_1 pasti, dakle je $\alpha > \beta - \gamma$. Isto se tako nađe:

$$\gamma > \beta - \alpha \text{ i } \beta > \alpha - \gamma \text{ ili } \beta > \gamma - \alpha.$$

Iz toga slijedi:

U svakom je trobridcu jedan bridni kut manji od zbroja a veći od razlike drugih dvaju bridnih kutova.

Kako glasi slična poučka u ravninomjerstvu?

Ako je n. pr. $\alpha = 60^0$, $\beta = 70^0$, to mora biti $\gamma < 60^0 + 70^0$ i $\gamma > 70^0 - 60^0$, t. j. $10^0 < \gamma < 130^0$.

Među kojim je međama α, ako je $\beta = 96^0$, $\gamma = 114^0$? itd.

§. 139. **Zbroj bridnih kutova.** Ako postaju bridni kuti ugla sve veći, to će biti ugao sve tuplji. Kad napokon padnu pobočne plohe u jednu ravninu, tad iznosi zbroj bridnih kutova četiri prava kuta. Iz toga slijedi:

Na svakom je uglu zbroj bridnih kutova manji od četiri prava kuta.

Zadaci za vježbu: 1. Koju vrijednost ne može jedan bridni kut prekoračiti u pravilnom a) trobridcu, b) četverobridcu c) n-bridcu?

2. Koliko ima pravilnih uglova, na kojima je jedan bridni kut jednak kutu pravilnoga a) trokuta, b) četverokuta c) peterokuta, d) šesterokuta?

§. 140. **Sukladnost.** Dva se ugla zovu sukladna, kad se mogu jedan u drugi tako umetnuti, da se njihovi bridovi, dakle i pobočne plohe prikriju. Iz toga slijedi, da su bridni kuti i plošni kuti jednoga ugla po redu jednaki bridnim odnosno plošnim kutovima druga (sukladnoga) ugla.

Koji uvjet mora se još ispuniti, da dva pravilna ugla s jednakim brojem strana budu sukladna?

Tjelesa.

Bridnjak ili prizma.

§. 141. **Postanak.** a) Ako se omiče pravac po opsegu mnogokuta ostajuć uvijek paralelan sam prema sebi, to postane na dvije strane neomeđen prostor, koji se zove prizmatički prostor. Pokaži u liku 135. tvorni pravac i provodni mnogokut.

Dio prizmatičkoga prostora između dvije paralelne ravnine, koje ga sijeku, zove se bridnjak ili prizma.

b) Bridnjak postane također, kad se mnogokut tako pomiče, da svi njegovi vrhovi opisuju paralelne pravce. Pokaži u likovima 135. do 137. tvorni mnogokut i provodne pravce.

§ 142. **Opis.** Svaki bridnjak je mnogoplošac ili poliedar t. j. on je tijelo omeđeno samim ravninama. Zbroj svih međašnih ploha zove se njegovo oplošje.

Oba mnogokuta, koja a) postanu paralelnim presjekama svih bridova prizmatičkoga prostora ili b) koji su prvi i posljednji položaj tvornoga mnogokuta, zovu se osnovke bridnjaka; one su sukladni mnogokuti. Sve ostale međašne plohe zovu se pobočne plohe, a njihov se zbroj zove pobočje. Pobočne su plohe paralelogrami (Za što?)

Sjecišnjice pobočnih ploha s osnovkama ili stranice osnovaka zovu se osnovni bridi. Svaka dva osnovna brida u istoj pobočnoj plohi su jednaka i paralelna (Za što?).

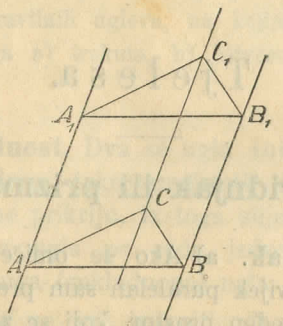
Sjecišnjice dviju susjednih pobočnih ploha zovu se pobočni bridi. Na svakom su bridnjaku svi pobočni bridi među sobom jednaki i paralelni. (Za što?)

Svaka osnovka pravi sa dvije susjedne pobočne plohe po jedan ugao bridnjaka. Svi su uglovi bridnjaka trostrani.

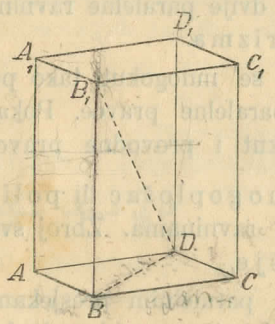
*

10. Daljina obiju osnovaka zove se visina bridnjaka.

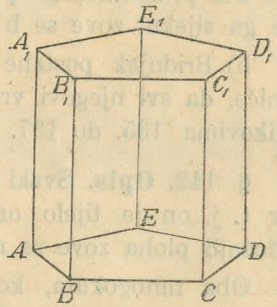
Naznači u likovima 135.—137. osnovke, pobočne plohe, osnovne bride, pobočne bride, vrhove uglova i nacrtaj visinu.



Lik 135.



Lik 136.



Lik 137.

11. §. 143. **Razdjelba i nazivanje**. Po broju pobočnih ploha dijele se bridnjaci na trostrane, četverostrane, ... *n*- ili mnogostrane.

11. Po položaju pobočnih bridova prema osnovkama dijele se bridnjaci na prave i kose. Bridnjak je prav odnosno kos, ako su pobočni bridi na osnovci okomiti ili kosi. Na svakom su pravom bridnjaku pobočne plohe pravokutnici i na osnovci okomite; pobočni su bridi jednaki visini. (Za što?)

12. Bridnjak sa skroz jednakim bridovima zove se istobridan Pravi bridnjak, kojemu su osnovke pravilni mnogokuti, zove se pravilan.

12. Bridnjak, kojemu su osnovke paralelogrami, zove se pašesterac ili paralelepiped; sve šest međašnih njegovih ploha su paralelogrami. Pravi i kosi paralelepiped.

Ako su osnovke pravoga paralelepipeda pravokutnici, to se on zove pravokutni paralelepiped (lik 136); sve šest međašnih njegovih ploha su pravokutnici.

Paralelepiped, na kojem su međašne plohe sukladni rombi, zove se romboedar ili kosi šesterac. Paralelepiped, na kojem su međašne plohe četvorine, zove se kocka, kubus ili šesterac (heksaedar).

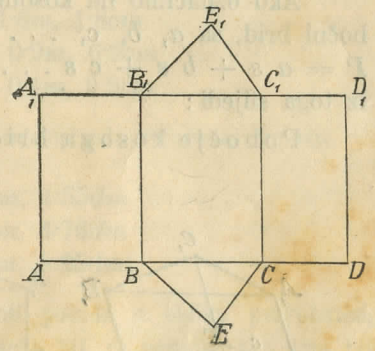
Zadaci za vježbu: 1. Naznači broj i vrstu međašnih ploha i uglova i broj bridova a) na istobridnom trostranom bridnjaku, b) na pravom paralelepipedu, c) na pravilnom peterostranom bridnjaku, d) na *n*-stranom bridnjaku. — Uz predvježbe na modelima i crtežima mogu se ovakovi opisi izvesti i bez neposrednoga posmatranja.

2. Nacrtaj mrežu a) pravilnoga trostranoga bridnjaka; b) pravokutnoga paralelepida; c) kocke; d) pravilnoga šesterostranoga bridnjaka. — Lik 138. je mreža pravoga trostranoga bridnjaka; $AB = BE$, $CD = CE$. Lik 140. je mreža pobočja kosoga trostranoga bridnjaka iz lika 139.

§. 144. **Ravne presjeke.** Svaka s osnovkama paralelna presjeka bridnjaka s njima je sukladna.

Presjeka okomita na jednom pobočnom bridu, okomita je i na svim ostalim pobočnim bridovima, te se zove okomita presjeka ili okomiti prorez bridnjaka (*DEF*, lik 139.)

Na kojim je bridnjacima okomiti prorez s osnovkama paralelan?



Lik 138.

Presjeka bridnjaka ravninom, koja ide dvjema nesusjednim pobočnim bridovima bridnjaka, daje dvokutnični prorez, koji je uvijek paralelogram. Dvokutničnih proreza je na bridnjaku uvijek toliko, koliko ima osnovka dvokutnica.

U paralelepipedu zove se svaka dvokutnica dvokutničnoga proreza dvokutnicom paralelepipeda; ona spaja dva suprotna ugla, koji nijesu u istoj međašnoj plohi. Svaki paralelepiped ima četiri dvokutnice.

Zadatak: Neka se iz dužine a, širine b i visine c pravokutnoga paralelepipeda izračuna dužina dvokutnice.

Iz pravokutnoga trokuta BCD (lik 136.) nađe se najprije $\overline{BC}^2$ a onda iz pravokutnoga trokuta B_1BD tražena dvokutnica B_1D. Neka se provede račun za posebne slučajeve i općenito. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Za kocku je $d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3\,a^2$; $d = a\sqrt{3}$; $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

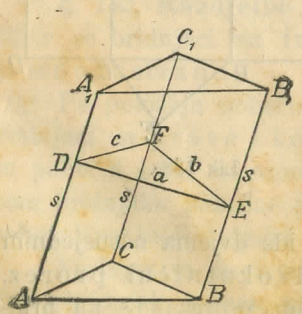
§. 145. **Određivanje oplošja.** Ako znači O oplošje, B osnovku (basis) a P pobočje bridnjaka, to je

$$O = 2B + P.$$

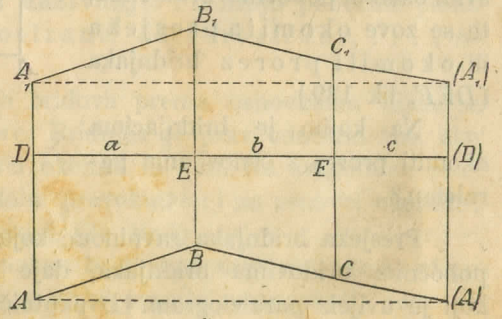
Pobočje pravoga bridnjaka jednako je pravokutniku, kojiima opseg osnovke bridnjaka za osnovnicu, a za visinu ima visinu bridnjaka. $P = o \,.\, v.$ (lik 138.)

Ako označimo na kosom bridnjaku (lik 139.) sa s jedan pobočni brid, sa a, b, c, . . . stranice okomitoga proreza, to je $P = a\,s + b\,s + c\,s \ldots = (a + b + c + \ldots .)\,s$. Iz toga slijedi:

Pobočje kosoga bridnjaka jednako je pravokutniku, kojemu je osnovnicom opseg okomitoga proreza, a visinom jedan pobočni brid.



Lik 139.



Lik 140

Ispravnost ove poučke slijedi također iz promatranja mreže, koja odgovara pobočju kosoga trostranoga ili mnogostranoga bridnjaka (lik 140.).

Zadaci za vježbu: 1. Koliko je oplošje kocke, ako jedan brid iznosi: $a = 3dm$, $2{\cdot}13m$, $4{\cdot}7$ . . . (skrać. množ), $0{\cdot}324$ . . . (skrać. množ.)

2. Koliko je oplošje kocke, ako diagonala iznosi: $d = 16cm$, $17{\cdot}64m$, $4{\cdot}23$ . . . m (skrać. množ.)

3. Koliko je oplošje kocke, ako ploština dvokutničnoga proreza iznosi: $p = 64cm^2$, $2{\cdot}56dm^2$, $0{\cdot}2357$ . . . m^2 (moguć. točnosti.)

4. Iz oplošja kocke izračunaj brid. N. pr. $O = 486m^2$, $8{\cdot}64m^2$, $3dm^2$ (na 2 dec.), $3{\cdot}1416$ . . . m^2 (moguć. točnosti).

5. Iz oplošja kocke izračuuaj dvokutnicu. N. pr. $O = 96dm^2$, $600cm^2$, $2{\cdot}1316m^2$.

6. Iz oplošja kocke izračunaj ploštinu dvokutničnog proreza. N. pr. $O = 9{\cdot}54m^2$, $11{\cdot}84dm^2$, $12cm^2$ (na 3 znamen.)

7. Iz dimenzija a, b, c (dužina, širina, visina) pravokutnoga paralelepipeda izračunaj dvokutnicu. N. pr.

$a = 5dm$, $8cm$, $1{\cdot}6m$, $1{\cdot}8cm$
$b = 8dm$, $12cm$, $0{\cdot}9m$, $6{\cdot}9cm$
$c = 9dm$, $16cm$, $0{\cdot}4m$, $9{\cdot}9cm$

8. Iz a, b, c pravokutnog paralelepipeda izračunaj oplošje. N. pr.

$a = 7m$, $2{\cdot}3dm$, $1{\cdot}35dm$
$b = 8m$, $4{\cdot}5dm$, $4{\cdot}76dm$
$c = 9m$, $7{\cdot}9dm$, $8.25dm$.

9. Iz $1m^2$ lima ima se načiniti posuda u obliku pravokutnog paralelepipeda gore otvorena. Kako visoka bit će posuda, ako ima biti $0{\cdot}5m$ duga a $0{\cdot}25m$ široka?

10. Izračunaj oplošje pravilnoga trostranoga bridnjaka, ako je poznat osnovni brid a i pobočni brid b. N. pr.

$a = 4dm$, $8cm$, $0{\cdot}94m$, $0{\cdot}256m$
$b = 6dm$, $9cm$. $3{\cdot}56m$, $0{\cdot}789m$

11. Izračunaj oplošje pravilnoga četverostranoga i šesterostranoga bridnjaka iz osnovnog i pobočnog brida. N. pr.

$a = 3dm,\ 5{\cdot}3cm,\ 0{\cdot}49m$

$b = 4dm,\ 8{\cdot}9cm,\ 0{\cdot}56m.$

12. Izračunaj oplošje pravilnoga trostranoga i šesterostranoga bridnjaka, ako je osnovni brid jednak pobočnomu ($a = b$). N. pr.

$a = 6cm,\ 8dm,\ 1{\cdot}2m,\ 6{\cdot}48dm.$

§. 146. **Određivanja obujma; razjašnjenja.** Veličina prostora, što ga tijelo zauzima, zove se njegov obujam ili volumen ili njegova tjelesnina.

Za jedinicu obujma ili prostornu jedinicu uzima se kocka, kojoj je brid jednak jedinici dužine. Prema tomu, ako se uzme za jedinicu dužine $1m, 1dm, 1cm$, itd., zove se obujam takove kocke 1 kubični metar, 1 kubični decimetar, 1 kubični centimetar, itd.

Obujam tijela iznaći ili njegov obujam izmjeriti, reći će tražiti broj, koji pokazuje, koliko se puta jedinica obujma u zadanu obujmu sadržava. Taj se broj zove mjerni broj zadanoga obujma.

147. **Iskustveno određivanja obujma.** a) Obujam šupljih posuda određuje se tako, da se one napune kakovom tekućinom, koja se tekućina prelije u posudu, na kojoj je ljestvica ili skala za mjerenje obujma.

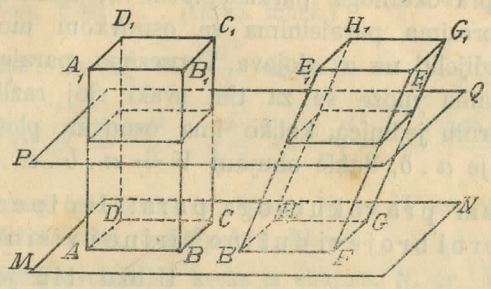
b) Da se odredi obujam krutoga kojega tijela, napuni se posuda, koja ima oblik n. pr. pravokutnoga paralelepida, donekle kakovom tekućinom, pa se zadano tijelo sasvim u tekućinu zaroni. Obujam tijela jednak je onda obujmu istisnute tekućine, t. j. jednak obujmu pravokutnoga paralelepipeda, kojemu je osnovkom unutarnji okomiti prorez posude, a visina mu je daljina obiju površina tekućine prije i poslije uronjenja.

c) Ako ima tijelo posvuda jednaku gustoću, onda je broj, koji pokazuje, koliko je puta specifična težina (težina jedinice obujma) u apsolutnoj težini tijela sadržana, mjernim brojem obujma. $V = \frac{P}{s}$. Primjeri.

Zadaća je mjerstva pokazati, kako se obujam tjelesa izračunava iz mjernih brojeva onih pružaca, ploha itd., od kojih

je on zavisan. Neposredno prenošenje jedinice obujma u zadanom prostoru, dok se on ne iscrpe, redovito se ne da izvesti.

§. 148. **Cavalierijev princip.** Ako se postavi jedan pravi i jedan kosi paralelepiped sukladnih osnovaka i jednakih visina na ravninu MN (lik 141.), to su obje gornje osnovke u ravnini, koja je paralelna s ravninom MN i svaka između osnovaka sa MN paralelna ravnina, kao PQ, siječe oba paralelepipeda u sukladnim paralelogramima. (Za što?)



Lik 141.

Oba paralelepipeda imaju jednaki obujam, o čemu se možeš ovako osvjedočiti. Pomišljaj od tankoga lima sa $ABCD$ sukladne likove izrezane te u dovoljnom broju tako naslagane, da oni čine prvi paralelepiped. Ako sad limene ploče tako pomakneš, da $ABCD$ dođe u $EFGH$, a dva se reda uglova poređaju po pravcima EE_1 i FF_1, to ćeš dobiti kosi paralelepiped. (Na sitne skalinama slične hrape nagnutih pobočnih ploha ne trebamo se obazirati, jer su hrape to manje, što smo tanji lim uzeli.) Iz toga slijedi, da imaju oba paralelepipeda jednaki obujam i to obujam upotrebljenoga lima.

Slično razmatranje mogli bi izvesti, kad bi isporedili druga dva tijela, ako ona i ne imaju sukladne već samo plošno jednake osnovke, i ako ravnina paralelna s osnovkama siječe oba tijela u prorezima ma kakova oblika, samo ako oni imaju jednaku plоštinu. No onda se mora jedna ploča prvoga tijela s jednako velikom pločom ali drugog oblika nadomjestiti. Iz toga slijedi:

Ako se mogu dva tijela u takav položaj postaviti, da budu svi prorezi, koji su sa stanovitom

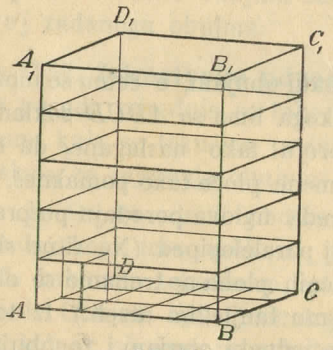
ravninom paralelni, među sobom jednaki, to imaju ona jednaki obujam. (Cavalierijev princip).

Iz toga pak slijedi neposredno: Bridnjaci jednakih osnovaka i jednakih visina imaju jednake obujme.

S toga je obujam kojega god bridnjaka nađe, ako se izračuna obujam pravokutnoga paralelepipeda, koji ima s bridnjakom jednaku osnovku i jednaku visinu.

§. 149. **Obujam pravokutnoga paralelepipeda.** Neka ima dužina pravokutnoga paralelepipeda a, širina b a visina c jedinicâ. Prorezima paralelnima sa osnovkom može se paralelepiped razdijeliti na c slojeva. Prorezima paralelnima sa pobočnim plohama može se za tim svaki sloj razlijeliti na baš toliko prostornih jedinica, koliko ima osnovka plošnih jedinica. Broj njihov je $a \,.\, b$, dakle obujam $V = a \,.\, b \,.\, c$.

Obujam pravokutnoga paralelepipeda nađe se, ako se mjerni brojevi dužine, širine i visine pomnože.



Lik 142.

U liku 142. je $a = 4\ cm$, $b = 3\ cm$, $c = 5\ cm$, s toga $V = 60$ kubičnih centimetara.

Ako označimo osnovku sa B a visinu sa v, to je $B = a \,.\, b$, $v = c$, dakle $V = B \,.\, v$, t. j. obujam pravokutnoga paralelepipeda jednak je produktu od osnovke i visine.

Pošto je kocka istobridan pravokutan paralelepiped, to je za nju $V = a \,.\, a \,.\, a = a^3$.

Obujam kocke nađe se, ako se mjerni broj brida potencira na kubus.

Opaske: 1. Kako možemo sad protumačiti označivanje „kubus nekoga broja“, i znakove $1m^3$, $1dm^3$, $1cm^3$, itd. za jedan kubični metar jedan kubični decimetar, jedan kubični centimetar.?

2. Potonjem se poučkom nađe:

$1m^3 = 1000dm^3 = 1{,}000.000cm^3 = 1.000{,}000.000mm^3$,

$1dm^3 = 1.000cm^3 = 1{,}000.000cmm^3$, itd.

Za šuplju mjeru je $1dm^3 = 1l$ (litar), $100l = 1hl$ (hektolitar).

3. Iz $V = a^3$ slijedi $a = \sqrt[3]{V}$; Riječima? — Treći korijen = kubični korijen.

Zadaci za vježbu: 1. Izračanaj obujam kocke iz brida. N. pr. $a = 5dm$, $12m$, $4{\cdot}12dm$, $0{\cdot}345m$, $2{\cdot}46$ . . . (skrać. množ.)

2. Izračunaj obujam kocke iz dvokutnice. N. pr. $d = 5dm$, $12cm$, $4{\cdot}8dm$, $0{\cdot}345m$, $2{\cdot}46$ . . . (skrać. množ.)

(Naputak: Iz $a^2 = \frac{d^2}{3}$ slijedi $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$; dakle

$$V = a^2 \,.\, a = \frac{d^2}{3} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{d^3 \,.\, \sqrt{3}}{9}.)$$

3. Izračunaj brid kocke iz obujma. N. pr. $V = 729cm^3$, $10dm^3$, $571{\cdot}787m^3$, $42\,875cm^3$, $5{\cdot}237m^3$, $1\ hl$.

4. Izračunaj dvokutnicu kocke iz obujma. N. pr. $V = 100dm^3$, $2{\cdot}744cm^3$, $59{\cdot}319dm^3$, $500l$.

5. Iz brida a kocke izračunaj brid dva puta veće kocke. N. pr. $a = 1dm$, $0{\cdot}214m$, $11cm$, $1{\cdot}23dm$.

6. Kocka od olova teška je $1kg$; kolik je njezin brid, kolik obujam? (specif. težina olova = 11·35). Općenito!

7. Izmjeri dimenzije kakvoga tijela ili prostora, koji ima oblik pravokutnoga paralelepipeda (n. pr. sobu, ormar, školsku ploču itd.) pa izračunaj njihov obujam.

8. Drveni model, koji ima oblik pravokutnoga paralelepipeda, ima težinu P, a dimenzije su mu a, b, c; kolika je specifična težina drva? N. pr. $P = 79{\cdot}04g$, $a = 52mm$, $b = 38mm$, $c = 80mm$.

9. U posudu $64cm$ dugu i $25cm$ široku, koja ima oblik pravokutnoga paralelepipeda, a samo je donekle vodom napunjena, stavi se nepravilan kamen; voda se digne za $35cm$ i pokrije kamen Kolik je obujam kamena?

§. 150. **Obujam bridnjaka u opće.** Ako je na bridnjaku osnovka B a visina v, to je njegov obujam $V = B \,.\, v$, jer je on po §. 148. baš tako velik, kao pravokutni paralelepiped s osnovkom B i visinom v.

Obujam bridnjaka u opće nađe se, ako se mjerni broj osnovke mjernim brojem visine pomnoži; ili kraće, ako se osnovka visinom pomnoži.

Neka je na bridnjaku $B = 2{\cdot}14m^2 = 214dm^2$, $v = 0{\cdot}7m$ $7dm$, to je $V = (214 \times 7)\ dm^3 = 1498dm^3 = 1{\cdot}498m^3$. Do istog se resultata dođe i ovim računom: $V = (2{\cdot}14 \times 0{\cdot}7)m^3 = 14{\cdot}98m^3$. Tako se uvjerismo, da se može obličak $V = B \,.\, v$ za svaki bridnjak neposredno upotrebiti, ako B i v nijesu cijeli brojevi.

Zadaci za vježbu: 1. Kako je visok bridnjak, kojemu je osnovka $45cm^2$ a obujam $1dm^3$; osnovka $75cm^2$, obujam $0{\cdot}525dm^3$; osnovka $2{\cdot}56dm^2$, a obujam $3{\cdot}072dm^3$?

2. Izračunaj obujam trostrana pravilna bridnjaka, ako je zadan osnovni brid a i visina v. N. pr.

$a = 1dm,\ 4cm,\ 3\ 8m$
$v = 2dm,\ 2{\cdot}5cm,\ 9{\cdot}46m.$

3. Izračunaj obujam trostrana pravilna bridnjaka, ako je osnovni brid jednak pobočnomu. N. pr. $a = 8\ 5cm.$

4. Koliki je obujam šesterostranoga pravilnoga bridnjaka, ako je zadan osnovni brid a i visina v? N. pr.

$a = 4dm,\ 8{\cdot}6cm,\ 0{\cdot}26m$
$v = 7dm,\ 9\ 9cm,\ 0{\cdot}58m.$

5. Koliki je obujam šesterostranoga pravilnoga bridnjaka, ako je osnovni brid jednak pobočnomu? N. pr. $a = 1{\cdot}2dm.$

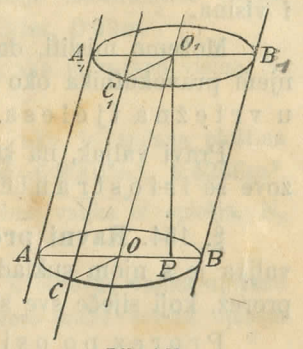
6. Zid je dug $42m$, a visok $3{\cdot}5m$. Prorez mu je trapez s paralelnim stranicama $a = 1m$, $b = 0{\cdot}64m$. Kolik je obujam zida i koliko stoji $1m^3$ zida, ako sav trošak iznosi 301 35 for?

7. Pravilni šesterostrani bridnjak s osnovnim bridom a i visinom b rasiječe sa dvokutničnim prorezom na trostrani i peterostrani bridnjak. Izračunaj oplošja i obujme obaju bridnjaka.

8. Koji su rezultati u 4. za $a = b$?

Valjak.

151. **Postanak.** a) Valjkasti prostor postane, ako se pravac, ostajući uvijek paralelan sam prema sebi po opsegu kruga omiče (lik 143.) Tvorni pravac, provodni krug.



Lik 143.

Ploha, što ju je tvorni pravac opisao, zove se valjkasta ploha; pravac OO_1, koji ide središtem provodnoga kruga paralelno s tvornim pravcem, zove se os valjkaste plohe.

Ravnina paralelna s provodnim krugom siječe valjkasti prostor u krugu; središte (O_1) ovoga kruga je ujedno sjecište osi s prorezom. Ako su naime AA_1, BB_1 CC_1, ... između obje paralelne plohe prušci tvornoga pravca u različnim položajima, to su četverokuti AOO_1A_1, BOO_1C_1, . . . paralelogrami (za što?); iz toga slijedi: $A_1O_1 = AO$, $B_1O_1 = BO$, $C_1O_1 = CO$, . . ., dakle također $A_1O_1 = B_1O_1 = C_1O_1 = \ldots$

Dio valjkastoga prostora između dvije ravnine, koje su paralelne s provodnim krugom, zove se valjak (točnije kružni valjak).

b) Valjak postane također, ako se kružna ploha pomiče paralelno sama prama sebi tako, da njezino središte opisuje pravac. Tvorni krug, provodni pravac ili os.

Isporedi postanak bridnjaka s postankom valjka.

§ 152. **Opis.** Oplošje valjka sastavljeno je od obiju osnovaka, koje su sukladni krugovi i od zaoblene pobočne plohe, koja se zove pobočje ili oblina ili plašt. Spojnica središta obiju osnovaka zove se os, a daljina obiju osnovaka (O_1P) visina valjka.

Dio tvornoga pravca između obje osnovke zove se stranica valjka. Svaka po osi položena ravnina siječe oblinu valjka u dvije stranice. Sve su stranice valjka među sobom i sa osiju jednake i paralelne.

§. 153. **Razdjelba i nazivanje.** Prema tomu, da li je os na osnovci valjka okomita ili kosa, zove se valjak prav ili kôs.

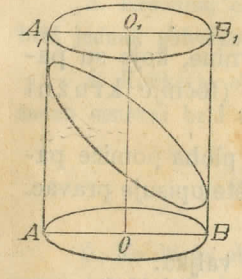
U pravom valjku (lik 144.) je os i svaka stranica ujedno i visina.

Možemo misliti, da je pravi valjak također postao okretanjem pravokutnika oko jedne stranice, pa se s toga valjak ubraja u vrtežna tjelesa.

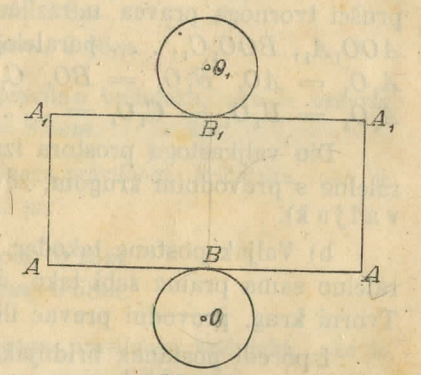
Pravi valjak, na kojem je promjer osnovke jednak visini, zove se istostraničan. ($v = 2r$).

§. 154. **Ravni prorezi.** Svaki s osnovkom paralelan prorez valjka je s njom sukladan, dakle je također krug. Svaki drugi prorez, koji siječe sve stranice valjka, elipsa je.

Prorez po osi valjka uvijek je paralelogram (za što?). Svi prorezi po osi kosoga valjka su (osim jednoga) kosi paralelogrami; svi prorezi po osi istostranična valjka su četvorine.



Lik 144.



Lik 145.

§. 155. **Određivanje oplošja.** $O = 2B + P$.

Ako pomislimo, da je oblina prava valjka duž jedne stranice prerezana i u ravniuu razmotana, to se dobije pravokutnik, kojemu je osnovnicom opseg osnovke valjka, a visinom visina valjka (lik 145.) S toga je $P = 2r\pi \,.\, v$, dakle

$$O = 2r^2\pi + 2r\pi.v = 2r\pi \,.\, (r + v).$$

Na istostraničnom valjku je $v = 2r$, s toga

$$O = 6r^2\pi.$$

Oblina kosoga valjka ne može se još na ovom stupnju obuke izračunati.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj oplošje istostranična valjka, ako je zadan polumjer. N. pr. $r = 2cm$, $8{\cdot}3dm$, $0{\cdot}59m$.

2. Izračunaj oplošje istostranična valjka, ako je zadana visina. N. pr. $v = 2cm$, $8{\cdot}3dm$, $0{\cdot}59m$.

3. Izračunaj oplošje istostranična valjka, ako je zadana ploština prereza po osi. N. pr. $p = 4dm^2$, $40{\cdot}96cm^2$, $6{\cdot}2001m^2$, $9{\cdot}4356m^2$.

4. Izračunaj polumjer osnovke istostranična valjka iz oplošja. N. pr. $O = 10dm^2$, $0{\cdot}188496m^2$.

5. U kocki brida a upisan je valjak t. j. osnovke valjka upisane su u dvije suprotne plohe kocke. Kako se odnose među sobom oplošja obiju tjelesa?

6. Izračunaj iz polumjera osnovke i visine prava valjka njegovo oplošje. N. pr.

$$r = 4m,\ 13cm,\ 3{\cdot}5dm$$
$$v = 7m,\ 18cm,\ 8{\cdot}2dm.$$

7. Izračunaj iz osnovke i visine prava valjka njegovo oplošje. N. pr. $B = 24cm^2$, $v = 5cm$.

8 Pravokutnik sa stranicama a i b zavrti se jedan put oko a, drugi put oko b. Kako se odnose oplošja vrtežnih tjelesa?

9. Valjak je oko kocke brida a opisan, t. j. osnovke valjka opisane su oko dviju suprotnih ploha kocke. Kako se odnose među sobom oplošja tih tjelesa?

10. Oko pravilnoga trostranoga bridnjaka sa osnovnim i pobočnim bridom a opisan je valjak. Koliko je oplošje valjka. N. pr. $a = 42cm$, $7{\cdot}5cm$, $0\,85dm$.

11. Izračunaj oplošje valjkaste cijevi iz polumjera R i r vanjskog i nutarnjeg opsega i iz dužine cijevi v.

Naputak:

$O = 2\,(R^2 - r^2)\,\pi + 2R\pi v + 2r\pi v = 2\pi\,[(R^2 - r^2) + Rv + rv] = 2\pi\,[(R + r)\,(R - r) + (R + r).\,v] = 2\pi\,(R + r)\,[R - r + v]$.

N. pr. $R = 12cm$, $r = 9cm$, $v = 5m$.

§. 156. **Određivanje obujma.** Ako postavimo valjak i bridnjak jednakih osnovaka (B) i jednakih visina (v) na istu rav-

ninu, to daju svi s ovom ravninom paralelni prorezi likove jednakih površina (B). Oba tijela imaju dakle jednaki obujam.

Obujam se valjka nađe, ako se mjerni brojevi osnovke i visine pomnože, ili kratko: ako se osnovka i visina pomnože.

$$V = B \,.\, v = r^2\pi.v.$$

Za istostraničan je valjak $V = 2r^3\pi$.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj obujam istaničnoga valjka α) iz visine v, β) iz plošine p proreza po osi.

N. pr. $v = 3{\cdot}5m$, $1dm$, $0{\cdot}275$; $p = 4dm^2$, $9{\cdot}4356m^2$.

2. Izračunaj polumjer osnovke istostraničnoga valjka iz obujma. N. pr. $V = 1dm^3$, $235cm^3$.

3. Izračunaj iz obujma istostraničnoga valjka njegovo oplošje. N. pr. $V = 2.4dm^3$, $3378cm^3$.

4. U kocki je upisan valjak, t. j. osnovke valjka su upisane u dvije suprotne plohe kocke. Kako se odnose među sobom obujmi obiju tjelesa?

5. Izračunaj iz polumjera osnovke i visine prava valjka obujam. N. pr. $r = 46mm$, $v = 76mm$; $r = 13cm$, $v = 25{\cdot}7cm$.

6. Sasvim nepravilno tijelo stavi se u valjkastu posudu pod vodu. Iz unutrašnjega promjera posude ($14cm$) i udaljenosti površinâ vode prije i poslije uronjenja ($12mm$) neka se izračuna obujam tijela.

7. Pravokutnik s osnovnicom a i visinom b zavrti se jedan put oko a, drugi put oko b. Kako se odnose među sobom obujmi vrtežnih tjelesa?

8. Znade se za osnovku i obujam prava valjka. Kolika je α) visina, β) koliko je oplošje? N. pr. $V = 7{\cdot}8cm^3$, $B = 26cm^2$; $V = 1m^3$, $B = 1{\cdot}25m^2$.

9. Valjkasta posuda je $18cm$ visoka, a mora da $1l$ drži. Kolik mora biti unutarnji promjer posude?

10. U uskoj valjkastoj staklenoj cijevi ima $47mm$ dugi stupčić žive, koji važe $585{\cdot}5mg$. Kolik je unutarnji promjer cijevčice, ako je specifična težina žive $13{\cdot}6$?

11. Iz obline (pobočja) i polumjera osnovke prava valjka izračunaj obujam. (Naputak: $V = r^2\pi.v = 2r\pi \,.\, v \,.\, \frac{r}{2} = \frac{P \,.\, r}{2}$).

Koje obraćaje dopušta ovaj zadatak? — N. pr. $P = 1m^2$, $r = 0{\cdot}5m$.

12. Valjak je oko kocke opisan, t. j. osnovke valjka su opisane oko dviju suprotnih ploha kocke. Kako se odnose među sobom obujmi ovih tjelesa?

14. Oko pravilnoga trostranoga bridnjaka s osnovnim bridom a i visinom v opisan je valjak. Kolik je obujam valjka? N. pr. $a = 42cm$, $v = 55cm$; $a = v$.

15. Izračunaj obujam ravne valjkaste cijevi, ako su poznati polumjeri izvanjega i unutrašnjeg opsega, i ako je poznata dužina cijevi. $V = (R^2 - r^2)\,\pi \,.\, v$.

N. pr. $R = 12cm$, $r = 9cm$, $v = 5m$.

16. $6m$ dubok valjkast studenac obzidan je $4dm$ debelim zidom a unutrašnji promjer mu je $2{\cdot}2m$. Koliko je studenac stajao, ako se je za vađenje $1m^3$ zemlje platilo osjekom $6{\cdot}4$kr. a za $1m^3$ zida 13 kr.?

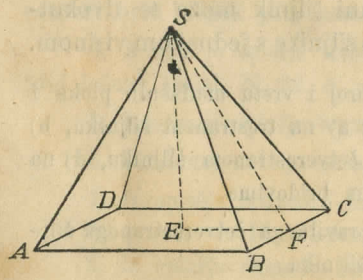
Šiljnik.

§. 157. **Postanak, opis.** Ako se kroz ugao položi ravnina, koja sve bride siječe, to će pobočne plohe ugla i sjecišna ravnina omeđašiti mnogoplošac, koji se zove šiljnik ili piramida (lik 146.). S toga se i zove ugao šiljnični prostor.

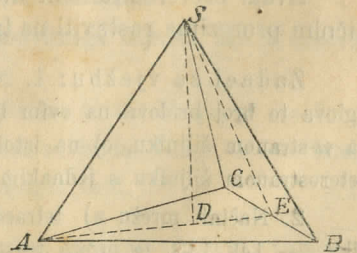
Iz opisa bridnjaka tumači se lako znamenovanje izraza:

Osnovka, pobočne plohe, pobočje, osnovni bridi, pobočni bridi šiljnika.

Pobočne su plohe na šiljniku uvijek trokuti, uglovi kod osnovke su uvijek trostrani. Sjecište svih pobočnih ploha zove se vrh; okomica spuštena s vrha na osnovku zove se visina šiljnika.



Lik 146.



Lik 147.

§. 158. **Razdjelba i nazivanje.** Po broju pobočnih bridova razlikujemo trostrane, četverostrane, ... n- ili mnogostrane šiljnike.

Po veličini pobočnih bridova razlikujemo šiljnike s jednakim pobočnim bridovima (također prave ili istokračne šiljnike) i šiljnike s nejednakim pobočnim bridovima (kose, raznokračne šiljnike). Ako su svi pobočni bridi šiljnika jednaki, to su vrhovi osnovke od podnožišta visine jednako udaljeni (§. 139. b.)

Osnovka šiljnika, koji ima jednake pobočne bride, tetivni je dakle mnogokut, u kojem je središte opisanoga kruga podnožište visine. Pobočne plohe su istokračni trokuti.

Šiljnik jednakih pobočnih bridova zove se pravilan, ako mu je osnovka pravilan mnogokut. Pobočne plohe pravilnoga šiljnika su sukladni istokračni trokuti. Ugao na vrhu je pravilan.

Ako su svi bridi šiljnika jednaki, zove se on istobridan. Pošto su pobočni bridi jednaki, to je osnovka tetivni mnogokut; a jer je osnovka također istostranična, to je ona pravilni mnogokut. Svaki istobridni šiljnik je dakle pravilan. Pobočne njegove plohe su istostranični sukladni trokuti. Iz toga slijedi, da ima samo trostranih, četverostranih i peterostranih istobridnih šiljnika. (Za što?)

Trostrani istobridni šiljnik zove se također četverac ili tetraedar (lik 147.); osmerac ili oktaedar (lik 158.) sastavljen je od dva četverostrana istobridna šiljnika.

§. 159. **Ravni prorezi.** Ako se položi ravnina po dvjema nesusjednim pobočnim bridovima, to se dobije dvokutnični prorez, i taj je uvijek trokut.

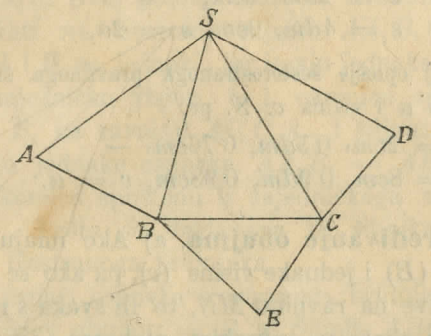
Svaki četverostrani ili mnogostrani šiljnik može se dvokutničnim prorezima rastaviti na trostrane šiljnike s jednakom visinom.

Zadaci za vježbu: 1. Naznači broj i vrstu međašnih ploha i uglova te broj bridova na ovim tjelesima: a) na trostranom šiljniku, b) na n-stranom šiljniku, c) na istobridnom četverostranom šiljniku, d) na peterostranom šiljniku s jednakim pobočnim bridovima.

2. Načini mrežu a) tetraedra b) pravilnoga četverostranoga šiljnika. — Lik 148. je mreža trostranoga šiljnika.

§. 160. **Određivanje oplošja.** Za oplošje šiljnika vrijedi obličak $O = B + P$.

Za n-strani pravilni šiljnik je $P = n \cdot \frac{a \cdot v_1}{2}$, gdje znači a osnovni brid a b_1 visinu jednoga pobočnoga trokuta (pobočna visina). Ako je o opseg osnovke, to je $o = n \cdot a$; dakle $P = \frac{o \cdot v_1}{2}$. (Riječima?).



Lik 148.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj oplošje pravilnoga četverostranoga šiljnika, ako je zadan osnovni brid a i pobočni brid b. N. pr.

$a = 6dm,\ 8cm,\ 0{\cdot}46m$
$b = 9dm,\ 12cm,\ 0{\cdot}54m.$

2. Izračunaj oplošje pravilnoga četverostranoga šiljnika, ako je zadan osnovni brid a i visina v. N. pr.

$a = 3dm,\ 11cm,\ 0{\cdot}25m.$
$v = 4dm,\ 16cm,\ 0{\cdot}76m.$

3. Koliko je oplošje četverostranoga pravilnoga šiljnika, ako je osnovni brid jednak pobočnomu. N. pr. $a = 5cm.$

4. Koliko je oplošje trostranoga pravilnoga šiljnika, ako je osnovni brid jednak visini. N. pr. $a = 7dm.$

5. Izračunaj oplošje tetraedra iz dužine brida. N. pr. $a = 6cm.$

6. Izračunaj oplošje oktaedra iz dužine brida. N. pr. $a = 8cm.$

7. Iz oplošja tetraedra izračunaj njegov brid.
N. pr. $O = 15{\cdot}588dm^2.$

8. Iz oplošja oktaedra izračunaj njegov brid. N. pr. $O = 100dm^2$

9. Šiljnik jednakih pobočnih bridova s ima za osnovku pravokutnik·

*

sa stranicama a, b. Koliko je oplošje? N. pr. $a = 14cm$, $b = 6cm$, $s = 10cm$.

10. Šiljnik jednakih pobočnih bridova s ima za osnovku pravokutan trokut sa katetama a, b. Koliko je oplošje? N. pr. $a = 4dm$, $b = 3dm$, $s = 8dm$.

11. Izračunaj oplošje šesterostranoga pravinoga šiljnika, ako je zadan osnovni brid a i pobočni brid s. N. pr.

$$a = 2dm,\ 6cm,\ —$$
$$s = 4dm,\ 9cm,\ s = 2a.$$

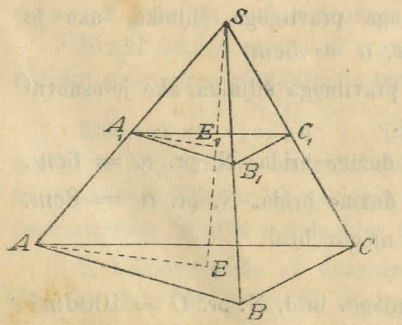
12. Izračunaj oplošje šesterostranoga pravilnoga šiljnika, ako je zadan osnovni brid a i visina v. N. pr.

$$a = 2cm,\ 0{\cdot}5dm,\ 0{\cdot}76cm,\ —$$
$$v = 8cm,\ 0{\cdot}9dm,\ 0{\cdot}98cm,\ v = a.$$

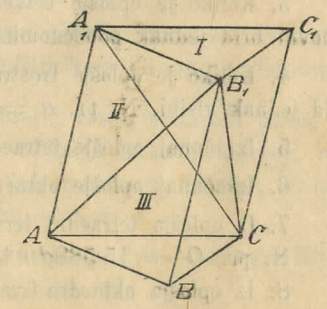
§. 161. **Određivanje obujma.** a) Ako imaju dva šiljnika jednake osnovke (B) i jednake visine (v), pa ako se oni sa svojim osnovkama postave na ravninu MN, to ih svaka s ravninom MN paralelna ravnina siječe u jednakim plohama, jer presjeka ima od vrhova obaju šiljnika jednake daljine (x); za presjeke B_1 i B_2 dobiju se naime jednake vrijednosti iz razmjerâ:

$$B : B_1 = v^2 : x^2 \text{ i } B : B_2 = v^2 : x^2.$$

Jer je u liku 148a, $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$ dakle $\triangle ABC : A_1B_1C_1 = \overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2$. Pošto je $\triangle ABS \sim A_1B_1S$ to je $AB : A_1B_1 = AS : A_1S$ no pošto je i $\triangle AES \sim A_1E_1S$, to slijedi $AS : A_1S = ES : E_1S$ ili $AB : A_1B_1 = ES : E_1S$ dakle i $\overline{AB}^2 : \overline{A_1B_1}^2 = \overline{ES}^2 : \overline{E_1S}^2$ ili $B : B_1 = v^2 : x^2$.



Lik 148a.



Lik 149.

Iz toga se zaključuje po Cavalierijevu principu:

Šiljnici jednakih osnovaka i jednakih visina jednaki su.

b) Svaki trostrani bridnjak može se razrezati na tri jednaka trostrana šiljnika.

Prorezom A_1B_1C raspada naime trostrani bridnjak $ABCA_1B_1C_1$ (lik 149.) na trostrani šiljnik $A_1C_1CB_1$ (I) i na četverostrani šiljnik ABB_1A_1C. Ovaj potonji može se dvokutničnim prorezom AB_1C razrezati na trostrane šiljnike AA_1B_1C (II) i ABB_1C (III). Šiljnici I i II su jednaki, jer imaju jednake osnovke, $A_1C_1C = AA_1C$, i zajedničku visinu, t. j. okomicu spuštenu iz zajedničkoga vrha B_1 na ravninu $AC_1C_1A_1$. I šiljnici II i III su jednaki, jer imaju jednake osnovke, $AA_1B_1 = ABB_1$, i zajedničku visinu, t. j. okomicu spuštenu iz zajedničkoga vrha C na ravninu ABB_1A_1. Pošto su dakle sva tri šiljnika jednaka, to je svaki trećina trostranoga bridnjaka.

Ako se označi osnovka trostranoga bridnjaka sa B a visina sa v, to je njegov obujam $= B.v$. Šiljnik $ABCB_1$ ima također osnovku B i visinu v, dakle mu je obujam $= \frac{B.v}{3}$.

Iz toga slijedi:

Obujam trostranoga šiljnika nađe se, ako se mjerni broj osnovke mjernim brojem visine pomnoži a umnožak sa 3 razdijeli; ili kraće: ako se produkt osnovke i visine sa 3 razdijeli.

$$V = \frac{B.v}{3} = B.\frac{v}{3} = \frac{B}{3}.v.$$

$$B = \frac{3V}{v}; \qquad v = \frac{3V}{B};$$

c) Ako ima mnogostrani šiljnik osnovku B a visinu v, to je on po a) jednak trostranomu šiljniku, koji ima osnovku B i visinu v, s toga je za svaki od tih šiljnika $V = \frac{B.v}{3}$.

Obujam svakoga šiljnika jednak je trećini produkta osnovke i visine.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj obujam pravilnoga četverostranoga šiljnika, ako je zadan osnovni brid a i α) visina v, β) pobočan brid s. (Upotrebi pravokutni trokut SEF ili SEB, 146.)

N. pr. $a = 12cm$, $v = 16cm$; $a = 233m$, $v = 149m$ (piramida Cheopsova); $v = a = 6dm$, $s = 5dm$; $s = a$ (istobridni četverostrani šiljnik).

2. Izračunaj obujam oktaedra iz dužine jednoga brida. (N. pr. $a = 6cm$.

3. Oktaedar je u kocki upisan t. j. vrhovi uglova oktaedra su u središtima plohâ kocke, ili osi obiju tjelesa padaju skupa. U kojem su omjeru obujmi obiju tjelesa, ako je brid kocke a?

4. Šiljnik jednakih pobočnih bridova s ima za osnovku pravokutnik sa stranicama a i b. Kolik je obujam šiljnika? N. pr. $a = 14cm$, $b = 6{\cdot}4cm$, $s = 1dm$.

5. Četverostrani šiljnik je u pravokutni paralelepiped tako upisan, da se osnovke sasvim slažu, a vrh šiljnika je u jednom gornjem uglu paralelepipeda. Izračunaj obujam šiljnika iz bridova a, b, c paralelepipeda.

6. Izračunaj obujam tetraedra iz jednog brida.

7. Pobočni bridovi trostranoga šiljnika su jednaki (s) i jedan na drugom okomiti. Naznači, kako se mora kocka presjeći, da se takav šiljnik dobije, pa izračunaj njegov obujam. (Kod izračunavanja obujma shodno je uzeti jednu pobočnu plohu za osnovku).

8. Izračunaj iz obujma tetraedra njegov brid. N. pr. $V = 1m^3$.

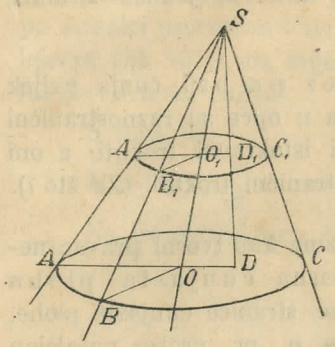
9. Izračunaj obujam pravilnoga šesterostranoga šiljnika, ako je osnovni brid a i α) visina v, β) pobočni brid s zadan.

Naputak za β). $V = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{s^2 - a^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3\,(s^2 - a)^2}$.

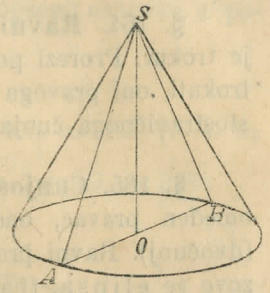
N. pr. $a = 2cm$, $v = 8cm$; $v = a$; $a = 12cm$, $s = 2dm$; $s = 2a$.

Čunj.

§. 162. **Postanak, opis.** Ako se poluzraka omiče, pridržavši krajnu točku nepomičnu, po opsegu kruga, kojega ravnina onu krajnu točku ne sadržava, to postane čunjast prostor (lik 150.). Tvorni pravac, provodni krug Ploha opisana tvornim pravcem zove se čunjasta ploha; pravac, koji ide nepomičnom točkom (S) tvornoga pravca i središtem (O) provodnoga kruga, zove se os čunjaste plohe.



Lik 150.



Lik 151.

Svaka presjeka čunjastoga prostora ravninom, koja je paralelna s provodnim krugom, krug je. Središte toga kruga (O_1) ujedno je sjecište osi s presjekom. Jer ako su A i A_1, za tim B i B_1 sjecišta obiju paralelnih ravnina s tvornim pravcem u kojim god položajima, to je $\triangle AOS \sim A_1O_1S$ i $\triangle BOS \sim B_1O_1S$. Ako je dakle $OS = m \,.\, O_1S$, to je također $AO = m \,.\, A_1O_1$ i $BO = m \,.\, B_1O_1$, dakle zbog $AO = BO$ također $A_1O_1 = B_1O_1$.

Dio čunjastoga prostora između nepomične točke i ravnine provodnoga kruga ili jednoga s njim paralelnoga proreza zove se čunj (točnije kružni čunj, conus).

Prispodobi postanak čunja s postankom šiljnika.

Iz opisa valjka i šiljnika jasno je znamenovanje izraza: osnovka, pobočje ili oblina ili plašt, vrh, stranica, os i visina čunja.

§. 163. **Razdjelba i nazivanje.** Ako je os na osnovci okomita, zove se čunj pravi, ako je kosa, zove se on kosi čunj.

U pravom čunju (lik 151.) os je ujedno visinom. Sve su stranice prava čunja jednake. (Za što?). — Možemo misliti, da pravi čunj postane i okretanjem pravokutnoga trokuta oko jedne katete, te ga za to ubrajamo u vrtežna tjelesa.

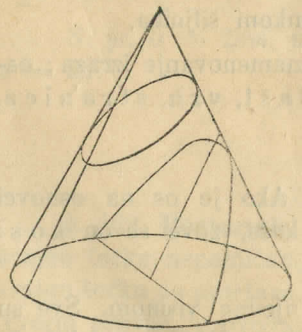
Pravi čunj, na kojem je promjer osnovke jednak stranici, zove se istostraničan.

§. 164. **Ravni prorezi.** Prorez po osi čunja uvijek je trokut. Prorezi po osi kosoga čunja u opće su raznostranični trokuti, oni pravoga čunja su sukladni istokračni trokuti, a oni stostraničnoga čunja su sukladni istostranični trokuti. (Za što?).

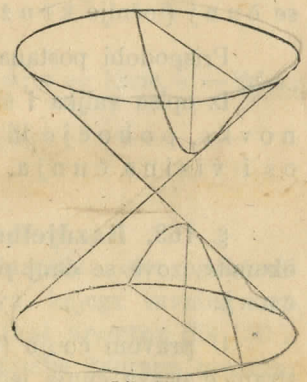
§. 165. **Čunjosječice.** Ako se uzme kao tvorni pravac neomeđen pravac, onda postane potpuna čunjasta ploha (dvočunj). Ravni prorez, koji zgađa sve stranice čunjaste plohe, zove se elipsa, (napose krug, ako je n. pr. prorez paralelan s provodnim krugom). Ravni prorez, koji je samo s jednom stranicom paralelan, zove se parabola; a onaj, koji je s dvije stranice paralelan, zove se hiperbola (lik 152. i 153.) U potonjem slučaju zgađa prorez oba dijela potpune čunjaste plohe, a vrhom položena paralelna ravnina siječe čunjastu plohu u one dvije stranice, s kojima je ravnina hiperbole paralelna.

Sve vrste čunjosječica mogu se dobiti neprestanim okretanjem proreza oko jedne osi, koja je s osnovkom čunja paralelna.

Da se prorezi na čunju predoče, može se upotrebiti šupalj dvočunj od stakla, kojemu su šupljine na vrhu u savezu, i koj je donjekle omaštenom tekućinom napunjen.



Lik 152.



Lik 153.

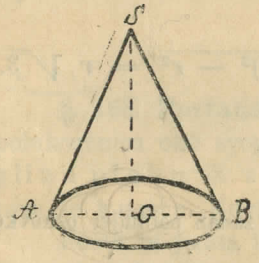
§. 166. **Određivanje oplošja.** Za oplošje svakoga čunja vrijedi obličak $O = B + P$.

Ako pomislimo, da je oblina (pobočje) prava čunja (lik 154.) po stranici prorezana i u ravninu razmotana, to ćemo dobiti kružni isječak (lik 155.), na kojem je luk jednak opsegu osnovke a polumjer stranici čunja.

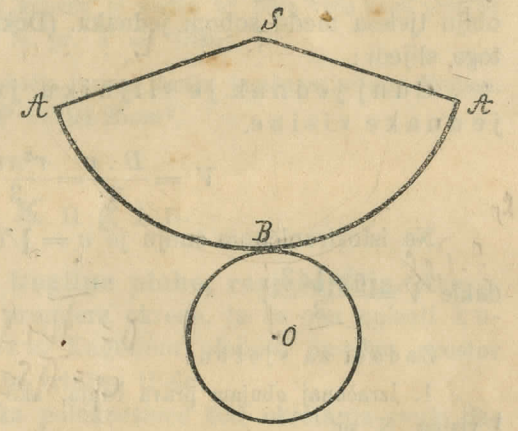
S toga je:

$$P = 2r\pi \cdot \frac{s}{2} = r\pi s \text{ i } O = r^2\pi + r\pi s = r\pi \cdot (r + s).$$

Na istostraničnom čunju je $s = 2r$, s toga $O = 3r^2\pi$.



Lik 154.



Lik 155.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj oplošje prava čunja, ako je zadan polumjer osnovke i stranica. N. pr.

$r = 1dm,\ 5cm,\ 0{\cdot}4m, \ldots$
$s = 13dm,\ 8cm,\ 0{\cdot}9m,\ s = 2r.$

2. Izračunaj oplošje prava čunja, ako je zadan polumjer osnovke i visina. N. pr.

$r = 2dm,\ 4cm,\ 0{\cdot}13m, \ldots$
$v = 10dm,\ 9cm,\ 0{\cdot}25m,\ v = r.$

3. Koliko je oplošje prava čunja, koji je upisan u kocku brida a. N. pr. $a = 7cm$.

4. Pravokutni trokut sa katetama a, b i hipotenuzom c zavrti se redom oko svake stranice. Izračunaj oplošja vrtežnih tjelesa. N. pr.

$a = 3cm,\ a = 15cm,\ a = 20cm,\ b = 24cm$
$b = 4cm,\ b = 20cm,\ c = 25cm,\ c = 30cm.$

5. Iz oplošja istostranična čunja izračunaj njegovu visinu. N. pr. $O = 13{\cdot}5648 dm^2$ ($\pi = 3{\cdot}14$).; $O = 10 dm^2$.

6. Oko tetraedra opisan je čunj. Koliko je oplošje čunja, ako je brid tetraedra a? N. pr. $a = 6cm$.

Oblina kosoga čunja ne može se još na tom stupnju obuke proračunati.

§. 167. **Određivanje obujma.** Ako pomislimo čunj i šiljnik jednakih osnovaka B i jednake visine v na ravninu smještene, to će biti dva i dva s ovom ravninom paralelna proreza obiju tjelesa među sobom jednaka. (Dokaz kao u §. 161., a). Iz toga slijedi:

Čunj jednak je šiljniku jednake osnovke i jednake visine.

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{r^2 \pi v}{3}$$

Na istostraničnom čunju je $v = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = r\sqrt{3}$, dakle $V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$.

Zadaci za vježbu:

1. Izračunaj obujam prava čunja, ako je zadan polumjer osnovke i visina. N. pr.

$r = 1dm,\ 4cm,\ 0{\cdot}5m,$
$v = 13dm,\ 9cm,\ 0{\cdot}73m,\ v = r.$

2. Izračunaj obujam prava čunja iz polumjera osnovke i stranice. N. pr.

$r = 3dm,\ 5om,\ 0{\cdot}46m,$
$s = 7dm,\ 9cm,\ 0{\cdot}82m,\ s = 3r.$

3. Kolik je obujam prava čunja, koji je upisan u kocku brida a? N. pr. $a = 0{\cdot}8cm$.

4. Pravokutni trokut sa katetama a i b okreće se redom oko svake svoje stranice. Izračunaj obujme ovih triju vrtežnih tjelesa. N. pr. $a = 3dm$, $b = 4dm$.

5. Iz obujma istostranična čunja izračunaj promjer osnovke. N. pr. $V = 1{\cdot}5m^3$.

6. Valjak se pretvori u čunj s istom visinom. Kako se odnose među sobom polumjeri obiju osnovaka?

7. Oko tetraedra brida a opisan je čunj; koliki je obujam čunja? N. pr. $a = 8cm$.

8. Kako se odnosi obujam istostranična valjka prema obujmu istostranična čunja, ako imaju oba tijela isto oplošje?

9. Istostraničan valjak pretvori se u istostraničan čunj stranice s. Izračunaj visinu valjka. N. pr. $s = 1dm$.

10. Nađi visinu i obujam prava čunja, ako je zadano njegovo oplošje i promjer osnovke. N. pr. $O = 113{\cdot}097 cm^2$ $d = 8cm$.

11. Iz obujma čunja, kojemu je visina tri puta veća nego promjer osnovke, nađi taj promjer. N. pr. $V = 1dm^3$.

12. Iz osnovke i pobočja prava čunja izračunaj njegov obujam. N. pr. $B = 28{\cdot}27 cm^2$, $P = 94{\cdot}25 cm^2$,

Kugla.

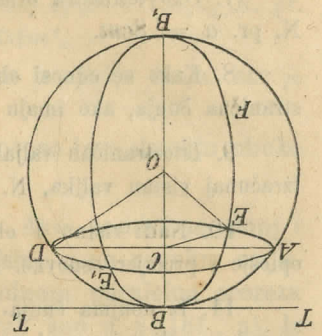
§. 168. **Postanak kugline plohe, razjašnjenja.** Ako se polukružnica oko svoga promjera okrene, to će ona opisati kuglinu plohu ili sferu. Kuglinom plohom omeđen prostor zove se kugla. Kugla je vrtežno tijelo.

Pošto ni jedna točka polukružnice kod okretanja svoje daljine od nepomičnoga središta ne mijenja, to imaju sve točke kugline plohe jednake udaljenosti od središta. Kuglina ploha je dakle skup svih točaka u prostoru, koje imaju od jedne stanovite točke jednake daljine. Točka ova zove se središte kugle. Spojnica središta s jednom točkom kugline plohe zove se polumjer. Svi su polumjeri kugle jednaki. Spojnica dviju točaka kugline plohe zove se tetiva, pa ako ona ide središtem, zove se promjer kugle. Svi su promjeri kugle jednaki, i to svaki je jednak promjeru tvornoga polukruga, ili svaki je jednak dvostrukomu polumjeru.

Točka je ili na kuglinoj plohi ili u kugli ili izvan nje, prema tomu da li je njezina daljina od središta jednaka polumjeru, ili je manja, ili je veća nego polumjer.

§. 169. **Kugla i pravac.** Ako je daljina pravca od središta kugle veća nego polumjer, to on nema s kuglom ni jedne

točke zajedničke. Ako je ta središnja daljina jednaka polumjeru, to ima pravac s kuglom jednu točku zajedničku, diralište (B, lik 156.); sve su ostale točke pravca izvan kugle (za što?). — Pravac se onda zove dirnica ili tangenta kugle (TT_1).



Lik 156.

Ako je daljina pravca od središta manja nego polumjer, to će pravac zgađati kuglinu plohu u dvije točke. Sječica i tetiva kugle.

Zadatak: Iz udaljenosti c tetive kugle od središta i polumjera r izračunaj dužinu s tetive.

Nađe se $s = 2\sqrt{r^2 - c^2}$. Iz toga slijedi:

a) Jednakim daljinama od središta pripadaju jednake tetive u kugli i obrnuto.

b) Manjoj daljini pripada veća tetiva kugle i obrnuto.

c) Kuglin promjer je najveća kuglina tetiva.

§. 170. **Kugla i ravnina.** Ako je daljina ravnine od središta kugle veća nego polumjer, onda ona nema s kuglom ni jedne točke zajedničke. Ako je daljina jednaka polumjeru, to ima ravnina s kuglom samo jednu točku zajedničku, diralište, te se zove dirna ravnina. Ona se može tako dobiti, da se krug sa svojom tangentom (TT_1), na promjeru (BB_1) okomitom, oko toga promjera (BB_1) okrene, iz toga slijedi:

a) Dirna ravnina sadržava sve tangente, koje se mogu diralištem na kuglu potegnuti

b) Dirna ravnina je u diralištu na promjeru okomita.

Ako je daljina ravnine od središta manja nego polumjer, to ona kuglu siječe. Svaka ravna presjeka je krug, te se zove kuglin krug. Pošto su naime prušci OD, OE . . . jednaki, to su i njihove projekcije CD, CE . . . jednake (lik 156.)

Zadatak: Izračunaj polumjer ϱ kuglina kruga iz njegove daljine c od središta i kuglina polumjera r. Nađe se $\varrho = \sqrt{r^2 - c^2}$. Iz toga slijedi:

c) jednakim daljinama od središta pripadaju jednaki kuglini krugovi i obrnuto.

d) Manjoj daljini pripada veći kuglin krug i obrnuto.

e) Kuglini su krugovi, koji idu središtem kugle, od svih kuglinih krugova najveći. Oni su svi među sobom jednaki, te se zovu najveći ili glavni krugovi; svaki drugi kuglin krug zove se pobočni krug ili nuskrug. (Glavni i pobočni krugovi na globu).

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj iz kuglina polumjera r i polumjera ϱ jednoga pobočnoga kruga daljinu od središta ovoga potonjega kruga. N. pr. $r = 1dm$, $\varrho = 8cm$.

2. Izračunaj iz ploština P i p glavnoga i pobočnoga kruga daljinu od središta ovoga potonjega kruga. (Nađe se $c^2 = r^2 - \varrho^2 = \frac{P}{\pi} - \frac{p}{\pi} = \frac{P-p}{\pi}$). N. pr. $P = 40cm^2$, $p = 25cm^2$.

3. Izračunaj obujam onoga čunja, kojemu je osnovkom jedan pobočni krug, a vrh mu je u središtu kugle, ako je poznat polumjer kugle i polumjer pobočnoga kruga. N. pr. $r = 1m$, $\varrho = 0{\cdot}6m$.

§. 171. **Sferička daljina.** Krajnim točkama promjera može se nebrojeno mnoštvo glavnih krugova položiti. (Zemaljski podnevnici ili meridijani). Drugima dvjema točkama kugline plohe pak može se samo jedan glavni krug položiti. (Za što?).

Pod sferičkom daljinom dviju točaka na kuglinoj plohi razumijeva se manji luk između te dvije točke glavnoga kruga. koji ide kroz obje točke, Odredi u liku 156. sferičku daljinu točaka E i F, B i F, A i D, B i B_1.

Kako se može izračunati sferička daljina dviju točaka na ekvatoru (polutniku) iz zemljopisnih dužina i sferička daljina dviju točaka meridijana (podnevnika) iz zemljopisnih širina obiju točaka?

Promjer kugle, koji je okomit na ravnini kojega god kuglina kruga, zove se os, a krajevi osi zovu se poli ili stožeri. Označi os i polove kuglina kruga AED. Objema polima (B, B_1) jednoga pobočnoga kruga i trećom kojom točkom kugline plohe (F) određena je glavna kružnica, koja pobočnu kružnicu u dvije točke (E, E_1) siječe. Manja od sferičkih daljina FE i FE_1 zove se sferička daljina točke F od kugline kružnice (AED).

Opredijeli pole jednoga usporednika na globu. Kako se na globu zove sferička daljina jedne točke od ekvatora?

Obrazloži još ispravnost ovih poučaka:

a) Sve paralelne kružnice na kugli imaju istu os i iste pole.

b) Jedan pol kružnice na kugli ima od svih točaka te kružnice jednake sferičke daljine, koje se zovu sferički polumjeri kružnice na kugli.

c) Svaka kružnica na kuglinoj plohi ima dva sferička polumjera.

d) Svaki pol glavne kružnice ima od svih točaka te kružnice daljinu 90°, ili sferički polumjer glavne kružnice iznosi 90°.

Kako se izračuna sferički polumjer kojega usporednika iz njegove zemljopisne širine?

§. 172. **Kuglin odsječak, kuglin sloj, kuglin isječak.** Kugla se dijeli ravninom na dva dijela, koji se zovu kuglini odsječci (segmenti). Od tih je onaj veći u kojem je središte kugle. Ako ide presjeka središtem kugle, to se kugla dijeli na dva jednaka dijela, koji se zovu polukugle.

Kuglina ploha dijeli se presjekom na dvije kugline kapice. Oplošje kuglina odsječka sastavljeno je od kuglina kruga (osnovka) i kugline kapice (oblina). Dijelovi, na koje se os kuglina kruga njime dijeli, zovu se visine odnosnih odsječaka i i kapicâ (BC i B_1C, lik 156).

Dio kugle između dvije paralelne presjeke zove se kuglin sloj. Oplošje njegovo sastavljeno je od dva paralelna kruga (osnovke) i dijela kugline plohe između paralelnih presjeka, koji se zove kuglin pojas ili zona (oblina). Daljina osnovaka zove se visina sloja ili pojasa.

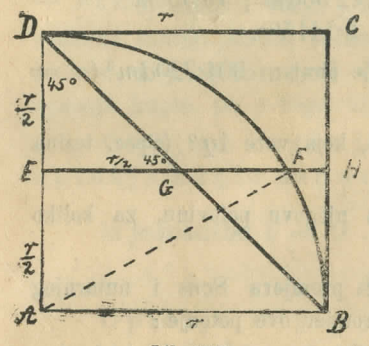
Ako se okrene isječak glavnoga kruga (BOD, lik 156.) oko jednoga svoga međašnoga polumjera (OB), to će on opisati kuglin isječak (sektor). Tijelo ovo može se presjekom razdijeliti na kuglin odsječak i čunj. Oplošje njegovo sastavljeno je od kapice i pobočja prava čunja.

Zadaci za vježbu: 1. Reci, koja ploha pravi okretanjem α) kuglin odsječak, β) kuglin sloj?

2. Koja mjerstvena označivanja odgovaraju zemljopisnim pojmovima: „studeni, umjereni i vrući pojas“?

3. Nađi iz polumjera r kugle i visine v kuglina odsječka polumjer ϱ osnovke N. pr. $r = 8{\cdot}5cm$, $v = 1cm$.

4. Kako se izračuna v iz r i ϱ? N. pr. $r = 12cm$, $\varrho = 85mm$.



Lik 157.

§. 173. **Određivanje obujma.** Ako se kvadrant kruga ABD i istokračni pravokutni trokut BCD (lik 157.) zavrte oko osi AD, to će kvadrant opisati polukuglu a trokut vrtežno tijelo, kojega je obujam jednak valjku manje čunju. Ako polukuglu i vrtežno tijelo presiječeš po sredini EH ravninom, to je presjeka polukugle krug ploštine $\pi . EF^2 = \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)$, a presjeka vrtežnoga tijela je vijenac ploštine $\pi\,(EH^2 - EG^2) = \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)$, t. j. ove su dvije presjeke jednake. S toga po Cavalijerijevu principu mora da je obujam polukugle jednak obujmu vrtežnoga tijela naime jednak obujmu valjka manje obujmu čunja ili

$$\frac{V}{2} = r^2\pi \,.\, r - r^2\pi \,.\, \frac{r}{3} = r^3\,\pi - \frac{r^3\pi}{3} = \frac{2r^3\pi}{3},$$

a obujam cijele kugle:

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}.$$

Za drugu koju kuglu je $V_1 = \frac{4r_1{}^3\pi}{3}$, s toga

$$V : V_1 = r^3 : r_1{}^3.$$

Poučka: Obujmi dviju kugala odnose se kao kubi njihovih polumjera.

Ako je zadan objam V, to se polumjer izračuna ovako:

$$3V = 4\pi r^3;\quad r^3 = \frac{3V}{4\pi};\quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}.$$

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj obujam kugle, ako je zadan α) polumjer $r = 1dm$, $5cm$, $3{\cdot}2dm$, $8{\cdot}42m$, $0{\cdot}586m$,

β) promjer $d = 1\,8dm$, $0{\cdot}96cm$, $0{\cdot}894m$,

γ) opseg najvećega kruga $o = 25{\cdot}12dm$, $62{\cdot}80m$, $39{\cdot}564m$. ($\pi = 3{\cdot}14$),

δ) ploština najvećega kruga. $p = 12{\cdot}56dm^2$, $79{\cdot}50cm^2$. ($\pi = 3{\cdot}14$), $380{\cdot}13239m^2$, $14{\cdot}2376m^2$ ($\pi = 3{\cdot}14159$).

2. Kolik je polumjer kugle, kojoj je obujam $904{\cdot}320dm^3$ ($\pi = 3{\cdot}14$). $1m^3$, $1hl$?

3. Kolik je promjer kugle od pluta, koja važe $1q$? (Spec. težina pluta $= 0{\cdot}24$).

4. Ako polumjer kugle povećaš za njegovu polovinu, za koliko se je povećao obujam?

5. Od šuplje olovne kugle vanjskoga promjera $8cm$ i nutarnjeg $6cm$ salije se masivna kugla. Kolik je promjer ove potonje?

6. Od dvije kugle iste tvarine jedna je dva puta teža nego druga. Koliko puta je polumjer prve kugle veći od polumjera druge?

7. Kolik je polumjer kugle, koji ima isti obujam s istostraničnim valjkom visine v? N. pr. $v = 12cm$.

8. Oko kocke brida a opisana je kugla. Kako se odnose obujmi obaju tjelesa? N. pr. $a = 20cm$.

9. Iz kocke izrežeš najveću kuglu. Kolik je obujam kugle, ako je obujam kocke $12{\cdot}167dm^3$?

10. Oko prava valjka (ϱ, v) opisana je kugla. Izračunaj obujam kugle. N. pr. $\varrho = 4dm$, $v = 6dm$.

11. Oko polukrugle opiše se pravi valjak a pravi čunj se u nju upiše. Kako se odnose među sobom obujmi tih triju tjelesa? (Arhimedova poučka).

12. Istostraničan trokut sa opisanim krugom zavrti se oko visine trokuta kao osi. Kako se odnose među sobom obujmi vrtežnih tjelesa? N. pr. $s = 4dm$.

13. Vanjski promjer šuplje bakrene kugle je $12cm$ a debljina stijenke je $2mm$. Kolika je težina šuplje kugle, ako je specif. težina bakra $8{\cdot}8$?

§. 174. **Određivanja oplošja.** Opiši oko kruglje kakav god mnogoplošac sa plohama B_1, B_2 . . . B_n, t. j. svaka njegova ploha dotiče se kugle. Ako se mnogoplošac razdijeli na same šiljnike, kojima je vrh u središtu kugle, a plohe B_1, B_2, . . . B_n su im osnovke, to je obujam mnogoplošca

$$V = B_1 \cdot \frac{r}{3} + B_2 \cdot \frac{r}{3} + \ldots + B_n \cdot \frac{r}{3} = (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) \cdot \frac{r}{3} = O \cdot \frac{r}{3}.$$

Ovaj obličak valja i za kuglu, jer se ona malo razlikuje od opisana mnogoplošca, samo ako se uzmu pobočne plohe dovoljno malene, t. j. njihov broj dosta velik. Onda je V obujam a O oplošje kugle, pa s toga vrijedi očito poučka:

Obujam kugle jednak je šiljniku, kojemu je oplošje kugle osnovkom a polumjer visinom.

Iz jednadžbe $V = O \cdot \frac{r}{3}$ ili $\frac{4r^3\pi}{3} = O \cdot \frac{r}{3}$ nađe se:

$$O = 4r^2\pi.$$

Oplošje kugle jednako je četverostrukoj ploštini jednoga glavnoga kruga.

Za drugu koju kuglu je $O_1 = 4r_1{}^2\pi$, s toga

$O : O_1 = r^2 : r_1{}^2$. Poučka:

Oplošja dviju kugala odnose se kao kvadrati njihovih polumjera.

Kuglina ploha ne da se razmotati u ravninu, s toga se ne da ni njezina mreža točno nacrtati.

Zadaci za vježbu: 1. Izračunaj oplošje kugle, ako je zadan α) polumjer r, β) promjer d, γ) ploština ϱ jednoga glavnoga kruga. N. pr. $r = 1cm$; $d = 134mm$; $p = 14{\cdot}2376m^2$.

2. Kolika je površina cijele zemlje, ako se ona smatra kuglom, a opseg glavnoga kruga je α) 40. $000km$; β) 5400 zemljopisnih milja?

3. Iz oplošja kugle izračunaj njezin polumjer i obujam. (Kad si našao polumjer, upotrebi obličak $V = O \cdot \frac{r}{3}$). N. pr. $O = 125cm^2$.

4. Iz obujma kugle izračunaj polumjer i oplošje. N. pr. $V = 1m^3$.

5. U kojem je omjeru svaki dio zemaljske površine sa smanjenim dijelom na globu, koji ima promjer $42cm$?

6. Kugla se pretvori u kocku brida a. Za koliko se je time oplošje povećalo? N. pr. $a = 15cm$.

7. Oko prava valjka (ϱ, v) opisana je kugla. Izračunaj oplošje. N. pr. $\varrho = 4dm$, $v = 6dm$.

8. Oko kocke brida a opisana je kugla, kako se odnose među sobom oplošja tih tjelesa? N. pr. $a = 10cm$.

9. Oko tetraedra brida a opisana je kugla. Koliko je oplošje kugle? ($r = \frac{2}{3} v$).

10. Iz kocke brida a izrežeš najveću kuglu. Za koliko je oplošje kugle manje od oplošja kocke? N. pr. $a = 12dm$.

Pravilni mnogoplošci.

§. 175. **Razjašnjenja i poučka.** Pravilni se zovu takovi mnogoplošci, kojim su međašne plohe pravilni mnogogokuti i kojim su uglovi sukladni i pravilni.

Samo je pet pravilnih mnogoplošaca.

Ako su naime međašne plohe pravilni trokuti, to oni mogu činiti samo trostrane, četverostrane i peterostrane uglove, pošto zbroj bridnih kutova mora da ima manje nego četiri prava. Pravilnim trokutima su tri mnogoplošca omeđena i to četverac (tetraedar), osmerac (oktaedar) i dvadeseterac (ikosaedar).

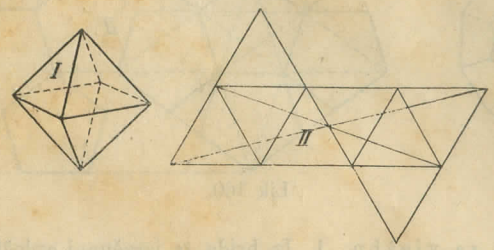
Ako su međašne plohe četvorine, to one mogu činiti samo trostrane uglove. (Za što?). Četvorinama omeđen pravilan mnogoplošac je samo jedan i to šesterac (heksaedar, kubus, kocka).

Ako su međašne plohe pravilni peterokuti, to oni mogu činiti samo trostrane uglove. (Za što?) Pravilnim peterokutima omeđen pravilan mnogoplošac je samo jedan jedini, dvanaesterac (dodekaedar).

Za što nema mnogoplošca, koji bi bio omeđen pravilnim šesterokutima ili sedmerokutima, itd?

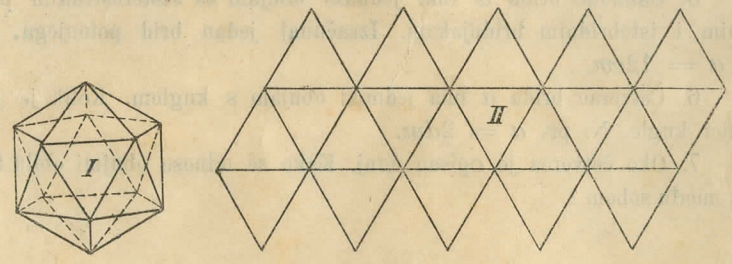
§. 176. **Opis.** O četvercu, osmercu i šestercu (kocki) već smo govorili. Lik 158. prikazuje osmerac i njegovu mrežu.

Dvadeseterac ima za međašne plohe dvadeset sukladnih istostraničnih trokuta. Od $3 \times 20 = 60$ stranica u trokutima čine po dvije jedan brid; dvadeseterac ima dakle 30 jednakih bridova. Od 60 kutova u 20 trokuta prave po pet njih jedan ugao dvadeseterca; on ima dakle 12 sukladnih uglova. Lik 159. prikazuje dvadeseterac i njegovu mrežu.



Lik 158.

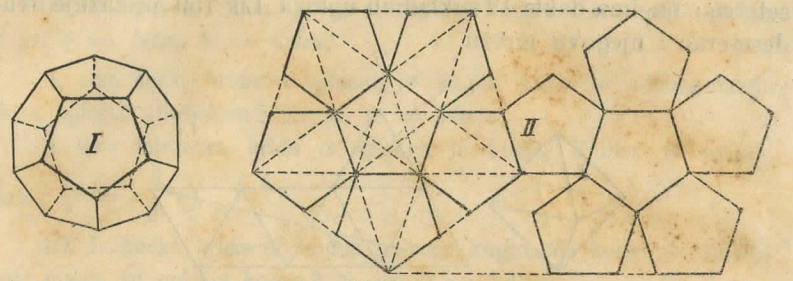
Dvanaesterac omeđen je sa dvanaest sukladnih pravilnih peterokuta. Koliko bridova i uglova ima on? — Lik 160. prikazuje dvanaesterac i njegovu mrežu.



Lik 159.

U svakom pravilnom mnogoplošcu ima jedna točka, koja je od svih vrhova i od svih međašnih ploha jednako udaljena; ona je dakle središte kugle oko mnogoplošca opisane i ujedno središte kugle u mnogoplošac upisane, te se zove središte mnogoplošca. Kako se nađe središte α) šesterca, β) osmerca?

Ako se središte pravilna mnogoplošca shvati kao vrh a međašne njegove plohe kao osnovke šiljnika, to se mnogoplošac raspada na toliko pravilnih šiljnika, koliko on ima međašnih ploha. Koliko pobočnih bridova ima jedan od tih šiljnika?



Lik 160.

Zadaci za vježbu: 1. Iz brida a izračunaj oplošje α) osmerca, β) dvadeseterca. N. pr. $a = 5dm$, $12{\cdot}7cm$.

2. Iz oplošja O osmerca izračunaj jedan brid i obujam. N. pr. $O = 40cm^2$.

3. Iz obujma četverca izračunaj brid i oplošje. N. pr. $V = 172cm^3$.

4. Četverac brida a ima jednako oplošje s dvadesetercem. Kolik je brid potonjega? N. pr. $a = 1dm$.

5. Osmerac brida a ima jednaki obujam sa šesterostranim pravilnim i istobridnim bridnjakom. Izračunaj jedan brid potonjega. N. pr. $a = 12cm$.

6. Četverac brida a ima jednaki obujam s kuglom. Kolik je polumjer kugle. N. pr. $a = 2dm$.

7. Oko četverca je opisan čunj. Kako se odnose obujmi obiju tjelesa među sobom?